TOPOLOGIA

WPPT I, sem. letni
WYKŁAD 1

PRZESTRZENIE METRYCZNE

Wrocław, 26 lutego 2010

METRYKI

Niech X oznacza dowolny **niepusty** zbiór, zwany od tej pory *przestrzenią*.

Definicja 1.
Metryką na przestrzeni X nazywamy dowolną funkcję $d : X \times X \to [0, \infty)$ spełniającą trzy warunki (zwane *aksjomatami metryki*).

1. $d(x, y) = 0 \iff x = y$ (aksjomat tożsamości)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (aksjomat symetrii)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (nierówność trójkąta)

(oczywiście w każdym w powyższych warunków na wszystkie punkty przestrzeni nałożony jest domyślny kwantywfikator ogólny $\forall$)

Zbiór X wyposażony w metrykę d, czyli parę (X, d) będziemy nazywać **przestrzenią metryczną**. Będzie to główny obiekt naszego zainteresowania.

Czasem rozważa się tzw. pseudometryki: *Pseudometryką* nazywamy dowolną funkcję $d' : X \times X \to [0, \infty)$ spełniającą wszystkie aksjomaty metryki z wyjątkiem implikacji $d(x, y) = 0 \implies x = y$. Tzn. pseudometryka dopuszcza odległość zerową pomiędzy różnymi punktami. Mając przestrzeń z pseudometryką można utworzyć przestrzeń metryczną jako przestrzeń klas równoważności, gdzie relacją jest $x \approx y \iff d'(x, y) = 0$. Szczegóły tej konstrukcji będą na ćwiczeniach.

PRZYKŁADY:

Metryki w przestrzeniach liczbowych:

1. *Prosta rzeczywista*: $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$;
2. *Płaszczyzna Euklidesowa*: $X = \mathbb{R}^2$, $d(\langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$;
3. *Płaszczyzna z metryką taksówkową*: $X = \mathbb{R}^2$, $d_t(\langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle) = |x-x'|+|y-y'|$;
4. *Płaszczyzna z metryką maximum*: $d_m(\langle x, y\rangle, \langle x', y'\rangle) = \max\{|x - x'|, |y - y'|\}$;

Metryki w bardziej abstrakcyjnych przestrzeniach:

5. *Metryka dyskretna*: X - dowolna, $d(x, y) = \begin{cases} 0 : & x - y \\ 1 : & x \neq y \end{cases}$;
6. *Metryka supremum w przestrzeni funkcyjnej*: $X = B(\mathbb{R})$ - zbiór wszystkich ograniczonych funkcji rzeczywistych na prostej, $d_{sup}(f, g) = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f(y)|$.
7. *Metryka optymalizacyjna*: X - dowolna przestrzeń, na której określony jest "surogat metryki", czyli funkcja $s : X \times X \to [0, \infty)$ spełniająca aksjomaty tożsamości i symetrii, ale nie spełniająca warunku trójkąta. Wtedy metryką jest

$$d_s(x, y) = \inf\{s(x_0, x_1) + s(x_1, x_2) + \cdots + s(x_{n-2}, x_{n-1}) + s(x_{n-1}, x_n) : \\ n \geq 1, x_0, x_2 \ldots, x_n \in X, x_0 = x, x_n = y\}$$

(Modelem może być świat z różnymi środkami komunikacji (w tym "pieszo"). Funkcją s jest czas przejścia lub przejazdu najszybszym środkiem lokomocji z punktu x do y. Metryką będzie znalezione najszybsze połączenie uwzględniające wszelkie możliwe przesiadki.)

KULE

W Topologii najważniejsze jest określenie *bliskości* dwóch punktów. Zbiór wszystkich punktów bliskich w punktowi x nazywamy *otoczeniem* punktu x. W przypadku przestrzeni metrycznej powiemy, że punkt y jest *bliski* punktowi x jeśli po prostu jego odległość $d(x,y)$ od x jest *mała* (tzn. mniejsza od jakiejś z góry ustalonej wartości uznanej przez nas za wystarczającą małą). W tym sensie otoczenie punktu x jest tym samym co kula o zadanym promieniu:

Definicja 2.
W przestrzeni metrycznej (X,d), *kulą* (otwartą) wokół punktu x o promieniu $r>0$ nazywamy zbiór

$$K(x,r) = \{y : d(x,y) < r\}.$$

Jeśli nierówność ,,$<$" zastąpimy przez ,,$\leq$", to otrzymamy tzw. *kulę domkniętą*. Przyjmuje się konwencję, że mówiąc ,,kula" mamy na myśli kulę otwartą, a mając na myśli kulę domkniętą mówimy to wyraźnie: ,,kula domknięta".
PRZYKŁADY:

1. Kula na prostej to przedział otwarty: $K(x,r) = (x-r, x+r)$;

2. Kula $K(\langle x,y\rangle, r)$ na płaszczyźnie euklidesowej to koło o śroku w punkcie $\langle x,y\rangle$ i promieniu r, bez brzegu;

3. Kula $K(\langle x,y\rangle, r)$ w metryce taksówkowej to kwadrat o środku w punkcie $\langle x,y\rangle$ i przekątnej $2r$ ustawiony diagonalnie;

3. Kula $K(\langle x,y\rangle, r)$ w metryce maksimum to kwadrat o środku w punkcie $\langle x,y\rangle$ i boku $2r$ ustawiony osiowo;

4. Kula w metryce dyskretnej to jeden punkt: $K(x,r) = \{x\}$ (dla $r \leq 1$) lub cała przestrzeń (dla $r>1$).

Tomasz Downarowicz