T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
WYKŁAD 10
Kategorie, Twierdzenie Baire'a

Wrocław, 28 maja 2008

Definicja: Zbiór G w przestrzeni metrycznej jest *typu* G_δ jeśli można go przedstawić jako przekrój przeliczalnej rodziny zbiorów otwartych

$$G = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Zbiór F w jest *typu* F_σ jeśli można go przedstawić jako sumę przeliczalnej rodziny zbiorów domkniętych:

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Z praw de Morgana łatwo widać że zbiór jest typu G_δ wtedy i tylko wtedy gdy jego dopełnienie jest typu F_σ.

PRZYKŁAD 1. Zbiór liczb niewymiernych $\mathbb{IQ}$ nie jest ani otwarty ani domknięty na prostej $\mathbb{R}$. Ale jego dopełnienie $\mathbb{Q}$ jest typu F_σ, gdyż jest przeliczalną sumą zbiorów jednopunktowych, a te są domknięte. Zatem zbiór $\mathbb{IQ}$ jest typu G_δ.

PRZYKŁAD 2. Rozważmy następujący podzbiór odcinka $[0,1]$: Ustalmy najpierw $\epsilon > 0$, a następnie ciąg $\epsilon_n > 0$ taki, że $\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n = \epsilon$ (na przykład $\epsilon_n = \frac{\epsilon}{2^n}$). Ponumerujmy wszystkie liczby wymierne z przedziału $[0,1]$ w ciąg (q_n). Niech

$$U_\epsilon = \bigcup_{n=1}^{\infty} K(q_n, \epsilon_n).$$

Jest to zbiór otwarty zawierający wszyskie liczby wymierne z $[0,1]$, a więc gęsty (w przestrzeni $[0,1]$). Czy jest to cały odcinek? Otóż nie. Wynika to z grubsza rzecz biorąc z tego, że sumaryczna długość odcinków stanowiących kule $K(q_n, \epsilon_n)$ wynosi nie więcej niż 2ϵ, za mało aby pokryć odcinek o długości 1.
Takie zbiory możemy tworzyć dla różnych wartości parametru ϵ, na przykład dla $\epsilon_k = \frac{1}{k}$. Na końcu można te zbiory przekroić:

$$G = \bigcap_{k=1}^{\infty} U_{\frac{1}{k}}.$$

Jest to oczywiście zbiór typu G_δ zawierający wszystkie liczby wymierne z odcinka. Mogłoby się wydawać, że przekrój ten to będą TYLKO liczby wymierne. Patrząc na ustaloną liczbę wymierną q_n zbiór U_ϵ w pobliżu q_n to kula $K(q_n, \epsilon_n)$. Jesli $\epsilon = \frac{1}{k}$ maleje do zera, ϵ_n też maleje do zera i kule takie kurczą się, a ich przekrój to jeden punkt q_n. Wydawałoby się, że nic więcej nie zostanie. Tak jednak nie jest, co wynika z tego, że w pobliżu punktu q_n są inne liczby wymierne ze swoimi kulkami, a nie tylko ta jedna kulka wokół q_n. W przekroju zbiorów $U_{\frac{1}{k}}$ będzie dużo liczb niewymiernych. To paradoksalne zjawisko zostanie wyjaśnione przez nasze dzisiejsze główne twierdzenie - twierdzenie Baire'a.

Definicja: Zbiór A w przestrzeni metrycznej jest *pierwszej kategorii* jeśli jest przeliczalną sumą zbiorów nigdzie gęstych. Przypomnijmy, że zbiór nigdzie gęsty to podzbiór zbioru domkniętego i brzegowego. Tak więc zbiór I kategorii to podzbiór przeliczalnej sumy zbiorów domkniętych brzegowych. W szczególości każdy brzegowy zbiór typu F_σ jest I kategorii.

Dopełnienie zbioru I kategorii jest więc przeliczalnym przekrojem zbiorów otwatych gęstych. W szczególności każdy gęsty zbiór typu G_δ jest dopełnieniem zbioru I kategorii. Takie zbiory mają swoją nazwę:

Definicja: Zbiór B w przestrzeni metrycznej jest *rezydualny* jeśli zawiera gęsty zbiór typu G_δ.

PRZYKŁAD 3. Powyżej rozważane zbiory typu G_δ - zbiór $\mathbb{IQ}$ oraz zbiór G są oczywiście gęste, a więc rezydualne. Ich dopełnienia (w szczególności $\mathbb{Q}$) są I kategorii.

Bez dodatkowych założeń, pojęcia zbioru rezydualnego i dopełnienia zbioru I kategorii mogą się różnić. Dopełnienie zbioru I kategorii może być puste (a zbiór rezydualny nie). Na przykład w przestrzeni $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych cała przestrzeń jest zbiorem I kategorii. Sytacja zmnienia się w przestrzeniach zupełnych i to jest właśnie treścią twierdzenia Baire'a:

Twierdzenie Baire'a: Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną zupełną lub homeomorficzną z zupełną (np. przestrzeń polska). Wtedy każdy przeliczalny przekrój zbiorów rezydualnych w X jest zbiorem rezydualnym.

Zanim udowodnimy to twierdzenie podamy kilka równoważnych sformułowań twierdzenia Baire'a. Ich wzajemną równoważność zostawiamy na ćwiczenia.

Twierdzenie Baire'a - wersje równoważne: (X, d) jest przestrzenią metryczną zupełną. Wtedy

(1) Każdy zbiór w I kategorii ma niepuste dopełnienie. (Cała przestrzeń nie jest I kategorii.)
(2) Każdy zbiór w I kategorii ma dopełnienie gęste. (Zbiór I kategorii jest brzegowy)
(3) Każdy zbiór w I kategorii ma dopełnienie rezydualne.
(4) Każdy przeliczalny przekrój zbiorów otwartych gęstych jest niepusty.
(5) Każdy przeliczalny przekrój zbiorów otwartych gęstych jest gęsty.
(6) Każdy przeliczalny przekrój zbiorów otwartych gęstych jest rezydualny.

Dowód twierdzenia Baire'a (w wersji (4)): Niech U_n będzie dowolnym ciągiem zbiorów otwartych i gęstych. Pewna kula $K(x_1, 2\epsilon_1)$ jest zawarta w U_1. Wtedy kula domknięta $\overline{K}(x_1, \epsilon_1)$ jest zawarta w U_1. Kula otwarta $K(x_1, \epsilon_1)$ ma niepusty przekrój z U_2 (bo ten jest gęsty). Zbiór $K(x_1, \epsilon_1) \cap U_2$ jest otwarty i niepusty, więc zawiera pewną kulę $K(x_2, 2\epsilon_2)$. Można zmniejszyć promień tak aby $\epsilon_2 < \epsilon_1$. Wtedy kula domknięta $\overline{K}(x_2, \epsilon_2)$ jest zawarta w $K(x_1, \epsilon_1) \cap U_2$. I tak dalej, indukcyjnie skonstruujemy ciąg kul $K(x_n, \epsilon_n)$ takich, że dla każdego n $\overline{K}(x_{n+1}, \epsilon_{n+1})$ jest zawarta w $K(x_n, \epsilon_n) \cap U_{n+1}$, gdzie liczby ϵ_n maleją do zera. Od tego miejsca można rozumować na dwa sposoby: inteligentny (tzn. z wykorzystaniem wcześniej udowodnionych faktów) lub "na piechotę".
Kule domknięte $\overline{K}(x_n, \epsilon_n)$ stanowią ciąg zstępujący zbiorów domkniętych o średnicach malejących do zera. Wiemy, że w przestrzeni zupełniej przekrój takiego ciągu jest

niepusty jednopunktowy (jest to warunek równoważny zupełności). Zatem nasze kule mają punkt wspólny x. Ponieważ kula $\overline{K}(x_n, \epsilon_n)$ jest zawarta w U_n, więc x jest w każdym ze zbiorów U_n. Koniec.
Na piechotę: zobaczmy, że ciąg x_n środków naszych kul jest podstawowy. To wynika z faktu, że kule te tworzą ciąg zstępujący, więc ciąg ten, od numeru n siedzi w kuli numer n, i wyrazy między sobą są oddalone o co najwyżej $2\epsilon_n$, co dąży do zera. Z zupełności ciąg ten jest zbieżny do pewnego x. Punkt ten należy zatem do domknięcia kuli numer n (dla każdego n). Ponieważ kula domknięta jest zawarta w U_n, punkt graniczny x należy do przekroju wszystkich U_n. Koniec.

PRZYKŁAD:
Wyjaśnia się dlaczego w przykładzie drugim przekrój zbiorów $U_{\frac{1}{k}}$ zawiera liczby niewymierne. Jest to przekrój zbiorów otwartych gęstych, a więc jest to zbiór rezydualny. Gdyby zawierał on tylko liczby wymierne (z odcinka), to znaczyłoby, że dopełnienie ($\mathbb{IQ}$ liczby niewymierne z odcinka) stanowi zbiór I kategorii. Każda liczba wymierna q jako zbiór jednopunktowy jest domknięty i brzegowy, zatem zbiór $\mathbb{Q}$ jest też I kategorii. W ten sposób cały odcinek (przestrzeń zupełna) byłby sumą dwóch zbiorów I kategorii ($\mathbb{IQ}$ plus $\mathbb{Q}$), czyli zbiorem I kategorii.

PRZYKŁAD: Przestrzeń $\mathbb{Q}$ liczb wymiernych nie jest przestrzenią polską. Wynika to z faktu, że przestrzeń polska (jako homeomorficzna z zupełną) nie jest zbiorem I kategorii (w sobie). A $\mathbb{Q}$ jest!

PRZYKŁAD:
Liczba rzeczywista x nazywa się *liczbą Liouville'a* jeśli jest ona niewymierna, i dla każdego n istnieje liczba wymierna $\frac{p}{q}$ ($q \geq 2$) taka, że $|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^n}$. Otóż to, że takie liczby w ogóle istnieją wynika właśnie z tw. Baire'a.
Zbiór liczb Liouville'a można zapisać tak:

$$L = \bigcap_{n=1}^{\infty} (U_n \setminus \mathbb{Q}),$$

gdzie

$$U_n = \bigcup_{q=2}^{\infty} \bigcup_{p=-\infty}^{\infty} (\tfrac{p}{q} - \tfrac{1}{q^n}, \tfrac{p}{q} + \tfrac{1}{q^n}).$$

Zbiór U_n jest otwarty (jako suma przedziałów otwartych) i gęsty (bo zawiera wszystkie liczby wymierne). Zatem $U_n \setminus \mathbb{Q}$ jest rezydualny (jako przekrój rezydualnych U_n i $\mathbb{IQ}$. W końcu L jest przeliczlnym przekrojem zbiorów rezydualnych, a więc też jest rezydualny, w szczególności niepusty.

Tomasz Downarowicz