T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni

WYKŁAD 11

Zbiór punktów nieciągłości

Wrocław, 11 czerwca 2007

Twierdzenie. *Niech (X, d) będzie zupełną przestrzenią metryczną, a (Y, d') dowolną przestrzenią metryczną. Jeśli $f : X \to Y$ jest funkcją I klasy Baire'a (tzn. istnieje ciąg funkcji ciągłych $f_n : X \to Y$ zbieżny punktowo do f), to zbiór punktów $x \in X$, w których f jest ciągła jest rezydualny.*

Do dowodu potrzebna będzie definicja i lemat.

Definicja. Funkcja f jest w punkcie x *ciągła z dokładnością* $\epsilon > 0$, jeśli istnieje $\delta > 0$ takie, że $d(x, y) < \delta \implies d'(f(x), f(y)) < \epsilon$.

Jest jasne, że f jest ciągła w punkcie x wtedy i tylko wtedy gdy jest tam ciągła z dokładnością do dowolnie małego $\epsilon > 0$, i że zbiór C wszystkich punktów ciągłości jest przeliczalnym przekrojem

$$C = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_{\epsilon_n},$$

gdzie C_{ϵ_n} jest zbiorem punktów ciągłości z dokładnością ϵ_n, a (ϵ_n) jest ciągiem malejącym do zera.
Zatem, na mocy twierdzenia Baire'a, aby udowodnić twierdzenie wystarczy udowodnić wersję słabszą (założenia te same):

Przeformułowanie. *Dla każdego $\epsilon > 0$ zbiór C_ϵ wszystkich punktów ciągłości z dokładnością ϵ funkcji f jest rezydualny.*

Lemat. *Jeśli X jest metryczna zupełna oraz $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, gdzie F_n są zbiorami domkniętymi, to $X = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Int} F_n}$.*

Dowód Lematu. Rozważmy dowolny zbiór otwarty $U \subset X$. Wtedy $(\overline{U}, d)$ jest przestrzenią metryczną zupełną i $\overline{U} = \bigcup_n (\overline{U} \cap F_n)$. Zbiory $\overline{U} \cap F_n$ są domknięte w przestrzeni $\overline{U}$, zatem znów korzystając z tw. Baire'a, nie mogą wszystkie one być brzegowe (zbiór domknięty i brzegowy jest nigdzie gęsty). Czyli istnieje n takie, że $\overline{U} \cap F_n$ ma niepuste wnętrze w $\overline{U}$. To znaczy że istnieje punkt $y \in \overline{U} \cap F_n$ i kula otwarta $V = K(y, \epsilon)$ (w metryce d), której przekrój z $\overline{U}$ jest zawarty w F_n. Ponieważ $y \in \overline{U}$, a V jest kulą wokół y, to $U \cap V \neq \emptyset$. Przekrój ten jest zatem niepustym zbiorem otwartym zawartym w F_n. Więc jest on zawarty w $\mathrm{Int} F_n$. Pokazaliśmy, że $\mathrm{Int} F_n \cap U \neq \emptyset$. Tym bardziej $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Int} F_n$ ma niepusty przekrój z U. Ponieważ U był dowolnym zbiorem otwartym w X, dowiedliśmy, że $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Int} F_n$ jest zbiorem gęstym w X. $\square$

Teraz możemy udowodnić twierdzenie (przeformułowane).

Dowód Przeformułowania. Ustalmy $\epsilon > 0$. Z punktowej zbieżności funkcji f_n do f wynika, że dla każdego $x \in X$ istnieje n takie, że $d'(f_n(x), f(x)) < \epsilon$.
czyli, że

$$X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x : d'(f_n(x), f(x)) < \epsilon\}.$$

Dalej,

$$d'(f_n(x), f(x)) < \epsilon \implies \exists_{m_0} \, \forall_{m \geq m_0} \;\; d'(f_n(x), f_m(x)) \leq \epsilon,$$

czyli

$$\{x : d'(f_n(x), f(x)) < \epsilon\} \subset \bigcup_{m_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq m_0} \{x : d'(f_n(x), f_m(x)) \leq \epsilon\}.$$

Łącząc ostatnie wzory dostajemy

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{m_0\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\geq m_0} \{x : d'(f_n(x), f_m(x)) \leq \epsilon\}.$$

Ponieważ w ostatnim nawiasie porównywane są dwie funkcje ciągłe i nierówność jest nieostra nawias ten opisuje zbiór domknięty. Ostatni przekrój też jest zatem zbiorem domkniętym (zależnym od parametrów n i m_0). Oznaczmy ten przekrój przez F_{n,m_0}. Ponieważ podwójna suma jest sumą przeliczalną, na mocy lematu wnętrza zbiorów F_{n,m_0} tworzą (łącznie) zbiór gęsty. Tym bardziej gęsta będzie suma wnętrz jeśli każdy ze zbiorów F_{n,m_0} zastąpimy przez zbiór większy. Mianowicie zauważmy, że

$$x \in F_{n,m_0} \iff \forall_{m\geq m_0}\ \ d'(f_n(x), f_m(x)) \leq \epsilon \implies d'(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon,$$

czyli $F_{n,m_0} \subset F_n$, gdzie $F_n = \{x : d'(f_n(x), f(x)) \leq \epsilon\}$. Przy zastąpieniu zbiorów F_{n,m_0} przez (większe od nich) zbiory F_n sumowanie po m_0 można pominąć (gdyż sumujemy tez sam zbiór).
Uzyskaliśmy następujący wynik: suma (po n) wnętrz zbiorów F_n jest gęsta w X, czyli zbiór

$$S = \bigcup_n \mathrm{Int} F_n$$

jest zbiorem gęstym i (oczywiście) otwartym, a więc w szczególności – rezydualnym.
Rozważmy teraz punkt $x \in S$. Wtedy x należy do pewnego F_n wraz z pewną kulą, powiedzmy o promieniu $\delta > 0$. Ponieważ mamy ustalone n i f_n jest funkcją ciągłą w punkcie x, to można zmniejszyć δ tak, aby dodatkowo spełniony był warunek $d(x, y) < \delta \implies d'(f_n(x), f_n(y)) < \epsilon$. Zatem $d(x, y) < \delta$ implikuje, że

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f_n(x)) + d'(f_n(x), f_n(y)) + d'(f_n(y), f(y)) < 3\epsilon,$$

gdzie pierwsze i ostatnie wyrażenie szacuje się dzięki temu, że x i y należą do F_n (a środkowe – bo tak dobraliśmy δ). Wykazaliśmy, że w punkcie x funkcja f jest ciągła z dokładnością 3ϵ. Innymi słowy zbiór $C_{3\epsilon}$ zawiera rezydualny zbiór S, zatem sam jest rezydualny. Oczywiście to samo jest prawdą gdy ϵ zastąpimy przez $\frac{\epsilon}{3}$, czyli C_ϵ jest rezydualny. To kończy dowód (przefrmułowanego) twierdzenia. $\square$

Tomasz Downarowicz