T O P O L O G I A   O G Ó L N A

WPPT

WYKŁAD 12

Topologia, baza, zbieżność, ciągłość, aksjomaty rozdzielania i aksjomaty przeliczalności

Rozważać będziemy zbiór X zwany dalej *przestrzenią*.

Definicja. *Topologią* w X nazywamy dowolną rodzinę $\mathcal{T}$ podzbiorów X spełniającą:

(1) $X, \emptyset \in \mathcal{T}$,
(2) $\forall_{\mathcal{A} \subset \mathcal{T}} \quad \bigcup \mathcal{A} \in \mathcal{T}$ (zamkniętość na dowolne sumy),
(3) $\forall_{U,V \in \mathcal{T}} \quad U \cap V \in \mathcal{T}$ (zamkniętość na skończone przekroje).

Elemety topologii nazywamy *zbiorami otwartymi*. Parę $(X, \mathcal{T})$ nazywamy *przestrzenią topologiczną*. Dla $x \in X$ przez *otoczenie* punktu x rozumieć będziemy dowolny zbiór otwarty zawierający x.

Definicja. Zbiór F nazywamy *domkniętym* jeśli jego dopełnienie jest zbiorem otwartym. *Domknięciem* zbioru $A \in X$ (oznaczanym przez $\bar{A}$) nazywamy przekrój wszystkich zbiorów domkniętych zawierających A (w najgorszym razie jest to X). Innymi słowy $\bar{A}$ jest najmniejszym zbiorem domkniętym zawierającym A.

Definicja. Dana jest przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$. *Bazą topologii* $\mathcal{T}$ w X nazywamy dowolną rodzinę $\mathcal{B}$ zbiorów otwartych spełniającą:

(1) $\forall_{U \in \mathcal{T}} \ \exists_{\mathcal{A} \subset \mathcal{B}} \ U = \bigcup \mathcal{A}$ (każdy zbiór otwarty jest sumą zbiorów bazowych).

Definicja. *Bazą* w przestrzeni X (bez zadanej topologii) nazywamy dowolną rodzinę $\mathcal{B}$ podzbiorów X spełniającą:

(1) $\bigcup \mathcal{B} = X$ (pokrywanie całej przestrzeni),
(2) $\forall_{U,V \in \mathcal{B}} \ \forall_{x \in U \cap V} \ \exists_{W \in \mathcal{B}} \ x \in W \subset U \cap V$ (istota bycia bazą).

Twierdzenie. (a) Każda baza topologii jest bazą (w sensie ostatniej definicji). (b) Każda baza jest bazą pewnej topologii i taka topologia jest dla tej bazy jedyna.

Dowód: — (a)
(1) $X \in \mathcal{T} \implies \exists_{\mathcal{A} \subset \mathcal{B}} \ X = \bigcup \mathcal{A}$. Tym bardziej $X = \bigcup \mathcal{B}$.
(2) $U, V \in \mathcal{B} \implies U \cap V \in \mathcal{T} \implies \exists_{\mathcal{A} \subset \mathcal{B}} \ U \cap V = \bigcup \mathcal{A}$. Zatem jeśli $x \in U \cap V$ to istnieje $W \in \mathcal{A}$ (w szczególności $W \in \mathcal{B}$), taki że $x \in W \subset U \cap V$.
— (b)
Jest oczywiste, że jeśli $\mathcal{B}$ jest bazą pewnej topologii $\mathcal{T}$, to $\mathcal{T} = \{\bigcup \mathcal{A} : \mathcal{A} \subset \mathcal{B}\}$. To da nam jedyność. Sprawdźmy aksjomaty topologii dla tej rodziny.
(1) $X = \bigcup \mathcal{B}$, $\emptyset = \bigcup \emptyset$.
(2) Zamkniętość na dowolne sumowanie jest oczywista.
(3) Zamkniętość na przekroje par: Niech $U = \bigcup \mathcal{A}$, $V = \bigcup \mathcal{A}'$, $(\mathcal{A}, \mathcal{A}' \subset \mathcal{B})$. Niech $\mathcal{A}'' = \{W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V\}$. Pokażemy, że $\bigcup \mathcal{A}'' = U \cap V$. Inkluzja „$\subset$" jest oczywista. Niech $x \in A \cap B$. Wtedy x należy do pewnych $U_0 \in \mathcal{A}$ i $V_0 \in \mathcal{A}''$, czyli do $U_0 \cap V_0$. Ale wtedy istnieje $W \in \mathcal{B}$, taki że $x \in W \subset U_0 \cap V_0$. Oczywiście $W \in \mathcal{A}''$, czyli $x \in \bigcup \mathcal{A}''$. $\square$

Definicja. Dana jest przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$ i ustalamy punkt $x \in X$. *Bazą topologii w punkcie* x nazywamy taką rodzinę $\mathcal{B}_x$ otoczeń x, że dowolne otoczenie x zawiera otoczenie z tej rodziny.

Twierdzenie. Jeśli $\{B_x : x \in X\}$ jest rodziną baz topologii we wszystkich punktach, to suma tej rodziny jest bazą tej topologii.

Dowód: Niemal oczywiste. $\square$

Definicja. Powiemy, że ciąg $(x_n)_{n\geq 1}$ w przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ *zbiega* do $x \in X$, jeśli w każdym otoczeniu punktu x siedzą prawie wszystkie (czyli oprócz skończenie wielu) wyrazy ciągu (x_n).

Twierdzenie. Jeśli zbiór jest domknięty, to wraz z każdym ciągiem zbieżnym zawiera jego granicę. Domknięcie zbioru A zawiera zbiór wszystkich granic ciągów zbieżnych zawartych w A.

Dowód. Taki sam jak w przestrzeniach metrycznych.
Uwaga: Podany w pierwszym zdaniu warunek NIE JEST równoważny domkniętości. W drugim zdaniu słowa „zawiera" NIE MOŻNA zastąpić słowami „jest równy". Musielibyśmy uwzględniać granice nie tylko ciągów, ale również tzw. ciągów uogólnionych (netów). Będzie o nich mowa na następnym wykładzie.

Definicja. Funkcja $f : X \to Y$ z przestrzeni topologicznej w przestrzeń topologiczną jest *ciągła w punkcie* $x \in X$, jeśli dla każdego otoczenia $V \ni f(x)$ (w Y) istnieje otoczenie $U \ni x$ (w X) takie, że $f(U) \subset V$. Funkcja f nazywa się *ciągła* jeśli jest ona ciągła w każdym punkcie dziedziny. *Homeomorfizm*, to funkcja odwracalna, ciągła o ciągłej odwrotnej.

Fakt. Funkcja f jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobrazy wszystkich zbiorów otwartych w Y są otwarte w X.

Dowód jest elementarny.

Definicja. Na przestrzeni X dane są dwie topologie, $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$. Powiemy, że $\mathcal{T}_1$ jest *słabsza* od $\mathcal{T}_2$, jeśli po prostu $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$.

Warunkami równoważnymi na tę inkluzję są:

(1) Identyczność, jako funkcja z $(X, \mathcal{T}_2) \to (X, \mathcal{T}_1)$ jest ciągła.
(2) Każda funkcja $f : X \to Y$ (Y dowolna przestrzeń topologiczna) ciągła w $\mathcal{T}_1$ jest ciągła w $\mathcal{T}_2$.
(3) Każda funkcja $f : Y \to X$ (Y dowolna przestrzeń topologiczna) ciągła w $\mathcal{T}_2$ jest ciągła w $\mathcal{T}_1$.
(4) Każdy ciąg uogólniony w X (definicja będzie podana na kolejnym wykładzie) zbieżny w $\mathcal{T}_2$ jest zbieżny w $\mathcal{T}_1$ do przynajmniej tych samych granic.

Dowody są natychmiastowe. Jedyną nieoczywistą implikację (4) $\implies$ $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ wykażemy na następnym wykładzie.

AKSJOMATY ROZDZIELANIA

Podajemy listę warunków typu rozdzielania, jakie może (ale nie musi) spełniać przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$. Obok każdego z nich podajemy symbol warunku i niekiedy nazwę klasyfikacyjną przestrzeni, które go spełniają, a po drugiej stronie – interpretację.

T_0 (Kołmogorowa) $\forall_{x\neq y}\ \exists_{U\in\mathcal{T}}\ \#(U \cap \{x, y\}) = 1$ (topologia rozróżnia punkty, różne zbiory jednopunktowe mają różne domknięcia),

T_1 $\forall_{x\neq y}\ \exists_{U\in\mathcal{T}}\ U \cap \{x, y\} = \{x\}$ (zbiory jednopunktowe są domknięte),

T_2 (Hausdorffa) $\forall_{x\neq y}\ \exists_{U,V\in\mathcal{T}}\ x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \emptyset$ (jednoznaczność granicy)

T_3 (regularna) T_1 oraz $\forall_x\ \forall_{F \text{ domkniętego},\ x\notin F}\ \exists_{U,V\in\mathcal{T}}\ x \in U,\ F \subset V,\ U \cap V = \emptyset$ (punkt ze zbioru otwartego siedzi tam wraz z domknięciem pewnego (mniejszego) otoczenia),

$T_{3,5}$ (Tichonowa) T_1 oraz $\forall_x\ \forall_{F \text{ domkniętego},\ x\notin F}\ \exists_{f:X\to[0,1] \text{ ciągła}}\ f(x) = 0,\ f(F) = \{1\}$,

T_4 (normalna) T_1 oraz $\forall_{F,G \text{ domkniętych},\ G\cap F=\emptyset}\ \exists_{U,V\in\mathcal{T}}\ F \subset U,\ G \subset V,\ U \cap V = \emptyset$.

Dalsze aksjomaty T_5 i T_6 nie będą dla nas istotne.

Każda przestrzeń metryczna (wystarczy *metryzowalna*, tzn. homeomorfoczna z metryczną) spełnia wszystkie powyższe aksjomaty.

Twierdzenie. $i \geq j \implies (T_i \implies T_j)$ $(i, j \in \{1,\ 2,\ 3,\ 3{,}5\ ,\ 4\})$.

Dowód pomijamy.

Twierdzenie (Lemat Urysohna). T_4 jest równoważne temu, że

$$\forall_{F,G \text{ domkniętych}, \ G\cap F=\emptyset}\ \exists_{f:X\to[0,1] \text{ ciągła}}\ \ f(F) = \{0\},\ f(G) = \{1\}.$$

Dowód pomijamy.

Twierdzenie. Każda przestrzeń zwarta Hausdorffa jest T_4.

Dowód: Najpierw zauważmy, że bez zakładania żadnych aksjomatów, podzbiory domknięte przestrzeni (pokryciowo) zwartej są zwarte. Niech bowiem $(X, \mathcal{T})$ będzie przestrzenią zwartą, a F jej podzbiorem domkniętym. Rozważmy otwarte pokrycie $\mathcal{U}$ zbioru F. Wtedy $\mathcal{U} \cup \{F^c\}$ jest otwartym pokryciem X. Zatem istnieje jego skończone podpokrycie, które automatycznie jest skończonym pokryciem zbioru F. Jeśli w pokrycie to wlicza się zbiór F^c, to można z niego zrezygnować i nadal zostanie pokrycie skończone zbioru F, już teraz będące podpokryciem $\mathcal{U}$.

Niech X będzie jak wyżej i ustalmy dwa podzbiory domknięte (a więc zwarte) i rozłączne F i G. Na mocy T_2, dla każdej pary $x \in F$ i $y \in G$ istnieje rozłączna para otoczeń $U_{x,y} \ni x, V_{x,y} \ni y$. Przy ustalonym x rodzina $\{V_{x,y} : y \in G\}$ jest pokryciem G, a więc istnieje podpokrycie skończone, powiedzmy $\{V_{x,y_i} : i = 1, \dots, n\}$. Zbiór $U_x = \bigcap_i U_{x,y_i}$ jest otwartym otoczeniem x, rozłącznym ze zbiorem $V_x = \bigcup_i V_{x,y_i}$, który z kolei jest otwartym otoczeniem zbioru G. W ten sposób wykazaliśmy własność T_3. Dalej, zbiory $\{U_x : x \in F\}$ tworzą pokrycie zbioru F. Wybieramy podpokrycie skończone $\{U_{x_j} : j = 1, \dots, m\}$ i widzimy, że zbiory $V = \bigcap_j V_{x_j}$ oraz $U = \bigcup_j U_{x_j}$ są rozłącznymi otoczeniami zbiorów odpowiednio G i F. $\square$

AKSJOMATY PRZELICZALNOŚCI

Podamy teraz dwa warunki dotyczące przeliczalności bazy, jakie może (ale nie musi) spełniać przestrzeń topologiczna $(X, \mathcal{T})$.

I aksjomat przeliczalności: W każdym punkcie istnieje przeliczalna baza topologii w punkcie.

II aksjomat przeliczalności: Istnieje przeliczalna baza topologii.

Fakty:

(1) W przestrzeni spełniającej I aksjomat przeliczalności, domkniętość zbioru, domknięcie zbioru, zwartość można identyfikować posługując się ciągami (por. uwaga przed aksjomatami rozdzielania).
(2) Każda przestrzeń metryczna spełnia I aksjomat przeliczalności.
(3) Przestrzeń metryczna jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia II aksjomat przeliczalności.
(4) Przestrzeń zwarta Hausdorffa jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia II aksjomat przeliczalności.
(5) Przestrzeń spełniająca II aksjomat przeliczalności jest metryzowalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest regularna (czyli T_3).

Dowody pomijamy.

Tomasz Downarowicz