T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
WYKŁAD 2

ZBIORY OTWARTE, DOMKNIĘTE, ZBIEŻNOŚĆ

Wrocław, 5 marca 2010

ZBIORY OTWARTE I DOMKNIĘTE

Rozważamy przestrzeń metryczną (X, d).

Definicja 1. Zbiór $U \subset X$ (nie zakładamy, że jest niepusty) jest *otwarty* jeśli

$$\forall_{x\in U}\ \exists_{r>0}\ K(x, r) \subset U.$$

(mówimy: zbiór U zawiera każdy swój punkt wraz z pewnym jego otoczeniem).
Zbiór $F \subset X$ nazywamy *domkniętym*, jeśli jego dopełnienie $F^c = X \setminus F$ jest otwarte.
Rodzinę wszystkich zbiorów otwartych w przestrzeni (X, d) nazywamy *topologią* i oznaczamy ją przez $\mathcal{T}$.

Zbiór pusty i cała przestrzeń X są zarówno otwarte jak i domknięte. Pamiętajmy, że w ,,typowej" przestrzeni ,,większość" zbiorów nie jest ani otwarta ani domknięta. Obie własności są w pewnym sensie wyjątkowe.

PRZYKŁAD: **Kula otwarta jest zbiorem otwartym**. Faktycznie, rozważmy kulę $K(x_0, r_0)$ i punkt x do niej należący. Wtedy $d(x, x_0) < r_0$. Określamy liczbę $r = r_0 - d(x, x_0)$. Jest ona dodatnia, możemy więc rozważać kulę $K(x, r)$. Niech $y \in K(x, r)$. Wtedy $d(y, x) < r$, zatem z nierówności trójkąta, $d(y, x_0) \le d(y, x) + d(x, x_0) < r + d(x, x_0) = r_0$. Pokazaliśmy, że $y \in K(x_0, r_0)$, czyli że $K(x, y) \subset K(x_0, r_0)$, więc ta ostatnia kula jest otwarta.

Twierdzenie 1: Suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym, przekrój dowolnej **skończonej** rodziny zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym. Analogicznie, przekrój dowolnej rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym, suma dowolnej **skończonej** rodziny zbiorów domkniętych jest zbiorem domkniętym.

Dowód: Niech $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ będzie rodziną zbiorów otwartych i rozważmy jej sumę,

$$V = \bigcup \mathcal{A} \quad \Big(= \{x : \exists_{U\in\mathcal{A}}\ x \in U\}\Big).$$

Jeśli $x \in V$ to $x \in U$ dla pewnego $U \in \mathcal{A}$, i wtedy istnieje kula $K(x, r)$ zawarta w U, a zatem i w V (bo oczywiście $U \subset V$). Czyli V jest zbiorem otwartym.
Niech teraz $U_1, U_2, \ldots U_n$ będzie skończoną rodziną zbiorów otwartych i niech tym razem V oznacza jej przekrój

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} U_i.$$

Niech $x \in V$. Wtedy $x \in U_i$ dla wszystkich $i = 1, 2, ..., n$. Zatem dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ istnieje promień r_i taki, że $K(x, r_i) \subset U_i$. Niech $r = \min\{r_i : i = 1, 2, \ldots, n\}$. Jest to liczba dodatnia, więc można rozważać kulę $K(x, r)$. Kula ta jest zawarta w każdej z kul $K(x, r_i)$ (bo ma nie większy promień), a zatem w każdym, ze zbiorów U_i, a zatem w ich przekroju V.
Dowód sformułowań o zbiorach domkniętych otrzymuje się teraz łatwo stosując wzory de Morgana. □

ZBIEŻNOŚĆ

Ciągiem w przestrzeni metrycznej nazwiemy dowolną funkcję ze zbioru $\mathbb{N}$ liczb naturalnych w X. Ciąg taki oznaczamy przez $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ albo skrótowo (x_n), albo też będziemy pisać $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ pamiętając, że $\forall_n\ x_n \in X$, oraz że elementy ciągu mogą się powtarzać.

Definicja 2: Dany jest ciąg (x_n) elementów X oraz $x \in X$. Powiemy, że ciąg (x_n) dąży (zbiega) do x, co zapisujemy albo jako

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

albo jako $x_n \underset{n}{\longrightarrow} x$, jeśli $\lim_n d(x_n, x) \to 0$ (w sensie ciągu liczbowego), czyli gdy

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_\epsilon\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_\epsilon}\ d(x_n, x) < \epsilon.$$

Okazuje się, że zbieżność ciągu można równoważnie zdefiniować nie odwołując się do metryki, posługując się wyłącznie zbiorami otwartymi. Oznacza to, że *zbieżność* jest pojęciem *topologicznym*, tzn. ma ono sens nie tylko w przestrzeniach metrycznych, ale i *topologicznych* (czyli takich, gdzie nie ma metryki, ale mimo to jest zadana rodzina $\mathcal{T}$ zbiorów ,,otwartych" spełniająca odpowiednie aksjomaty, których omawianie teraz pominiemy).

Twierdzenie 2: W przestrzeni metrycznej mamy równoważność: $\lim_n x_n = x \iff$

$$\forall_{U\in\mathcal{T},\, U\ni x}\ \exists_{n_U\in\mathbb{N}}\ \forall_{n\geq n_U}\ x_n \in U.$$

Dowód: Jeśli ostatni warunek jest spełniony, to dla dla dowolnego $\epsilon > 0$ jest on spełniony dla kuli $U = K(x, \epsilon)$. Wtedy na końcu tego warunku mamy $x_n \in K(x, \epsilon)$, a to jest to samo co $d(x_n, x) < \epsilon$, jak w definicji zbieżności. W drugą stronę: załóżmy, że zachodzi warunek z definicji zbieżności i ustalmy dowolny zbiór otwarty U zawierający x. Wtedy, z otwartości, istnieje promień $\epsilon > 0$ taki, że $K(x, \epsilon) \subset U$. Z warunku zbieżności istnieje n_ϵ taki, że dla wszystkich $n \geq n_\epsilon$ mamy $d(x_n, x) < \epsilon$, czyli $x_n \in K(x, \epsilon)$. W szczególności zachodzi wtedy $x_n \in U$. Czyli przyjmując $n_U = n_\epsilon$ dostajemy ostatni warunek w twierdzeniu. □

Twierdzenie 3: (o jedyności granicy) Jeśli $x_n \to x$ i $x_n \to x'$ to $x = x'$.

Dowód: Ustalmy $\epsilon > 0$. Niech n_ϵ i n'_ϵ będą jak w definicji zbieżności do x i do x', odpowiednio. Niech $n = \max\{n_\epsilon, n'_\epsilon\}$. Wtedy, z warunku trójkąta,

$$d(x, x') \leq d(x, x_n) + d(x', x_n) < 2\epsilon.$$

Ponieważ ϵ jest dowolnie mały, musi zachodzić $d(x, x') = 0$. Aksjomat tożsamości zamyka dowód. □

UWAGA: Twierdzenie 3 nie zachodzi w ogólnych przestrzniach topologicznych. Potrzeba do tego dodatkowych założeń (tzw. aksjomatów rozdzielania), które są autmatycznie spełnione w przestrzeniach metrycznych.

Podamy teraz warunek równoważny na domkniętość zbioru, wyrażony w języku zbieżności.

Twierdzenie 4: Zbiór F w przestrzeni metrycznej jest domknięty wtedy i tylko wtedy gdy wraz z każdym ciągiem zbieżnym zawiera on jego granicę:

(*) $$\forall_{(x_n):\forall_n x_n\in F}\ \forall_{x\in X}\ \lim_n x_n = x \implies x \in F.$$

Dowód: Niech F będzie domknięty (czyli $U = F^c$ otwarty) ale (dowodzimy nie wprost, zaprzeczamy (*)) niech istnieje ciąg (x_n) elementów F zbieżny do punktu x nie należącego do F. Z Twierdzenia 2, od pewnego numeru n_U wszystkie elementy ciągu należą do U, czyli nie należą do F. Sprzeczność, bo przecież wszystkie elementy ciągu należą do F.
W drugą stronę, aby pokazać, że z warunku (*) wynika domkniętość, pokażemy (nie wprost), że z zaprzeczenia domkniętości wynika zaprzeczenie warunku (*). Jeśli F nie jest domknięty, to jego dopełnienie U nie jest otwarte, czyli istnieje $x \in U$ taki, że dla dowolnego promienia ϵ, $K(x, \epsilon) \not\subset U$. W szczególności jest tak dla promieni postaci $\frac{1}{n}$. Brak zawierania oznacza, że $K(x, \frac{1}{n}) \cap F \neq \emptyset$. Dla każdego n istnieje zatem punkt (oznaczmy go przez x_n) należący do tego przekroju. Utworzyliśmy ciąg (x_n) o własnościach: $\forall_n x_n \in F$ oraz $d(x_n, x) < \frac{1}{n}$. Z twierdzenia o trzech ciągach (bo z drugiej strony $d(x_n, x) > 0$) dostajemy $\lim_n d(x_n, x) = 0$, czyli $x_n \to x$. Ponieważ $x \in U$ to $x \notin F$ i ciąg (x_n) zaprzecza warunkowi (*). $\square$

Tomasz Downarowicz