T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
WYKŁAD 3

ZBIERANKA POJĘĆ TOPOLOGICZNYCH
CIĄGŁOŚĆ

Wrocław, 12 marca 2010

DOMKNIĘCIE, WNĘTRZE, BRZEG

Poniżej A będzie zawsze oznaczać podzbiór przestrzeni metrycznej (X, d).

Definicja 1: Domknięciem zbioru A (oznaczanym przez $\overline{A}$) nazywamy przekrój rodziny wszystkich zbiorów domkniętych zawierających A. Jest to oczywiście zbiór domknięty, zawierający A i najmniejszy o tych dwóch własnościach.

Równoważnie, $x \in \overline{A} \iff \forall_{\epsilon>0}\ K(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset$, lub jeszcze inaczej, $x \in \overline{A} \iff$ istnieje ciąg (x_n) punktów z A zbieżny do x.

Definicja 2: Wnętrzem zbioru A (oznaczanym przez $\mathrm{Int}(A)$) nazywamy sumę rodziny wszystkich zbiorów otwartych zawartych w A. Jest to oczywiście zbiór otwarty, zawarty w A i największy o tych dwóch własnościach.

Przechodząc do dopełnień mamy następujące proste fakty: $\mathrm{Int}(A) = (\overline{A^c})^c$ oraz $\overline{A} = (\mathrm{Int}(A^c))^c$.

Definicja 3: Brzegiem zbioru A nazywamy zbiór $\partial A = \overline{A} \setminus \mathrm{Int}(A)\ \ (= \overline{A} \cap \overline{A^c})$.

Równoważnie, $x \in \partial A \iff \forall_{\epsilon>0}\ K(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset \wedge K(x,\epsilon) \cap A^c \neq \emptyset$, lub jeszcze inaczej, $x \in \partial A \iff$ istnieją dwa ciągi (x_n) punktów z A i (y_n) punktów spoza zbioru A, oba zbieżne do x. Brzeg dowolnego zbioru jest zbiorem domkniętym.

PRZYKŁADY:

1. Niech $A = (0,1]$ (w przestrzeni $\mathbb{R}$ z metryką „różnica modułu"). Wtedy mamy $\overline{A} = [0,1]$, $\mathrm{Int}(A) = (0,1)$, $\partial A = \{0,1\}$. Jak widać brzeg zbioru nie musi być zawarty ani w A ani w jego dopełnieniu.

2. Niech $A = \{x : d(x,x_0) < r\} \cup B$, gdzie $B \subset \{x : d(x,x_0) = r\}$ (na przykład A może być kołem na płaszczyźnie z dodanym dowolnym podzbiorem B odpowiedniego okręgu). Wtedy $\overline{A} = \{x : d(x,x_0) \le r\}$ (kula domknięta), $\mathrm{Int}(A) = \{x : d(x,x_0) < r\}$ (kula otwarta), $\partial A = \{x : d(x,x_0) = r\}$ (na to się czasem mówi *sfera* o promieniu r). Zauważmy, że zbiory te zupełnie nie zależą od B (w szczególności A może być kulą otwartą lub domkniętą).

3. Niech $A = \mathbb{Q}$ (zbiór liczb wymiernych na prostej). Wtedy $\overline{A} = \mathbb{R}$ (każda liczba rzeczywista jest granicą ciągu liczb wymiernych), $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$ ($\mathbb{Q}$ nie zawiera żadnego odcinka otwartego), $\partial A = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$. Jeśli zaczniemy od zbioru $\mathbb{IQ} = \mathbb{Q}^c$ liczb niewymiernych, to dostaniemy to samo domknięcie, wnętrze i brzeg. Przykład ten ilustruje, że dla zbioru i jego dopełnienia (które jest jego „przeciwieństwem") domknięcia mogą być nawet identyczne, podobnie wnętrza i brzegi.

4. Niech (X,d) będzie przestrzenią dyskretną. Wtedy każdy zbiór jednopunktowy $\{x\}$ jest kulą otwartą (np. $K(x,\frac{1}{2})$). Zatem każdy zbiór jest otwarty (jako suma zbiorów jednopunktowych). Automatycznie każdy zbiór jest też domknięty. Zatem dla dowolnego A mamy $\overline{A} = A$, $\mathrm{Int}(A) = A$ i $\partial A = \emptyset$. A więc jest to przestrzeń, w której NIE MA brzegów!

ZBIORY GĘSTE, BRZEGOWE I NIEGDZIE GĘSTE

Definicja 4: Zbiór A jest *gęsty* jeśli $\overline{A} = X$.

Na prostej gęste są na przykład: $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{IQ}$, $\mathbb{N}^c$. Nadzbiór zbioru gęstego jest gęsty.

Definicja 5: Zbiór A jest *brzegowy* jeśli $\mathrm{Int}(A) = \emptyset$, równoważnie, gdy jego dopełnienie jest gęste. Pojęcia zbioru gęstego i brzegowego są ,,dualne przez dopełnienie" (tak jak pojęcia zbioru otwartego i domkniętego).

Na prostej brzegowe są na przykład: $\emptyset$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{IQ}$, $\mathbb{N}$. Podzbiór zbioru brzegowego jest brzegowy. W przestrzeni dyskretnej tylko zbiór pusty jest brzegowy (i tylko cała przestrzeń jest gęsta).

UWAGA: Nie dajmy się zwieść nazewnictwu. Brzeg zbioru nie musi być zbiorem brzegowym! (Na przykład brzegiem zbioru liczb wymiernych jest cała przestrzeń.)

Definicja 6: Zbiór A jest *niegdzie gęsty* jeśli $\overline{A}$ jest zbiorem brzegowym.

Każdy zbiór nigdzie gęsty jest brzegowy, ale nie na odwrót. Na przykład $\mathbb{Q}$ jest brzegowy, ale jego domknięcie jest całą przestrzenią, więc już nie jest brzegowe. Zbiór nigdzie gęsty jest ,,tak bardzo brzegowy", że pozostaje brzegowy nawet po domknięciu. Oczywiście każdy zbiór domknięty brzegowy jest nigdzie gęsty. Zbiór jest nigdzie gęsty wtedy i tylko wtedy gdy jest podzbiorem zbioru domkniętego brzegowego.

Na prostej nigdzie gęste są na przykład: $\emptyset$, zbiory skończone, $\mathbb{N}$, zbiór Cantora (który poznamy w przyszłości). Wszystkie te przykłady są domknięte brzegowe. Niedomkniętym przykładem zbioru nigdzie gęstego jest $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.

CIĄGŁOŚĆ

Niech (X, d_X) i (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi. Poniżej f zawsze oznacza funkcję z X w Y.

Definicja 7 (ciągłości w punkcie w sensie Cauchy'ego): Funkcja $f : X \to Y$ jest *ciągła w punkcie* $x_0 \in X$ jeśli

$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{\delta>0}\ d_X(x, x_0) < \delta \implies d_Y(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Definicja 8 (ciągłości w punkcie w sensie Heinego): Funkcja $f : X \to Y$ jest *ciągła w punkcie* $x_0 \in X$ jeśli

$$\forall_{(x_n)\subset X} \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \implies \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Definicje powyższe są równoważne, jednak definicja Heinego odwołuje się tylko do pojęcia zbieżności, zatem jest *topologiczna*. Niestety, w topologii ogólnej pojęcie ciągłości funkcji w punkcie nie jest równoważne definicji Heinego z użyciem ciągów. Jednak to nie jest tematem naszego wykładu.

Definicja 9: Funkcja $f : X \to Y$ jest *ciągła* jeśli jest ona ciągła w każdym punkcie.

Powyższe pojęcie jest jednym z najważniejszych pojęć w toplogii. Podamy teraz warunek równoważny, wyrażony topologicznie (i w tej wersji stosowany w topologii ogólnej).

Twierdzenie 1: Funkcja $f : X \to Y$ jest ciągła wtedy i tylko wtedy gdy przeciwobraz dowolnego zbioryu otwartego w Y jest otwarty w X. Zapisujemy to

$$(*) \qquad \forall_{U\in\mathcal{T}_Y}\ f^{-1}(U) \in \mathcal{T}_X.$$

(Przypomnijmy, że dla $U \subset Y$, $f^{-1}(U) = \{x \in X : f(x) \in U\}$.)

Dowód: Załóżmy, że zachodzi warunek (*). Będziemy sprawdzać ciągłość f w dowolnym punkcie x_0 w sensie Heinego. Weźmy ciąg x_n zbieżny do x. Mamy sprawdzić, że ciąg $(f(x_n))$ zbiega do $f(x)$. Weźmy dowolny zbiór otwarty U zawierający $f(x)$. Mamy wykazać, że $f(x_n) \in U$ od pewnego numeru. Zbiór $f^{-1}(U)$ jest (z założenia (*)) otwarty w X i zawiera x (bo $f(x) \in U$). Zatem wyrazy ciągu x_n wpadają do $f^{-1}(U)$ od pewnego numeru n_0. Ale $x_n \in f^{-1}(U)$ oznacza, że $f(x_n) \in U$, i tak się dzieje powyżej numeru n_0. To właśnie mieliśmy wykazać.

W drugą stronę: Załóżmy ciągłość, i że nie zachodzi (*). To oznacza, że istnieje zbiór U otwarty w Y taki, że $f^{-1}(U)$ nie jest otwarty w X. To z kolei oznacza, że $(f^{-1}(U))^c$ nie jest domknięty, czyli że istnieje ciąg (x_n) punktów z $(f^{-1}(U))^c$ zbieżny do $x_0 \in f^{-1}(U)$. Z założenia ciągłości mamy $f(x_n) \to f(x_0)$. Sprawdźmy teraz gdzie leżą te punkty w Y. Otóż, $x_0 \in f^{-1}(U)$ oznacza, że $f(x_0) \in U$, natomiast $x_n \in (f^{-1}(U))^c$ to to samo co $x_n \notin (f^{-1}(U))$, czyli $f(x_n) \notin U$ (i tak jest dla wszystkich indeksów n). To jest sprzeczność, gdyż ze zbieżności $f(x_n) \to f(x_0)$ i tego, że U jest otwarty i zawiera $f(x_0)$ wynika, że $f(x_n) \in U$ od pewnego numeru. Ta sprzeczność kończy dowód. □

RÓWNOWAŻNOŚĆ METRYK

Definicja 10: Dane są dwie metryki d i d' na tej samej przestrzeni X. Powiemy, że metryki te są *równoważne* jeśli indukują one te same topologie: $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_{d'}$. Innymi słowy metryki są równoważne jeśli dla każdego $U \in X$, zbiór A jest otwarty w (X, d) wtedy i tylko wtedy gdy jest on otwarty w (X, d').

Warunkiem koniecznym i dostatecznym równoważności metryk jest: dla dowolnego ciągu $(x_n) \subset X$ i dowolnego punktu $x \in X$, $x_n \to x$ w metryce d wtedy i tylko wtedy $x_n \to x$ w metryce d'. Inny warunek konieczny i dostateczny jest następujący:

$$(**) \qquad \forall_{x\in X}\ \forall_{r>0}\ \exists_{r'>0}\ \Big(K_{d'}(x,r') \subset K_d(x,r)\ \wedge\ K_d(x,r') \subset K_{d'}(x,r)\Big).$$

Przykładami metryk równoważnych są metryki na płaszczyźnie: euklidesowa, taksówkowa i maksimum.

Poniższe twierdzenie wyraża równoważność metryk przy pomocy ciągłości:

Twierdzenie 2: Metryki d i d' na X są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy funkcja identycznościowa $\mathrm{Id} : X \to X$ traktowana jako funkcja z (X, d) w (X, d') jest ciągła oraz traktowana jako funkcja z (X, d') w (X, d) jest też ciągła.

Dowód: Równoważność metryk to to, że dowolny zbiór U jest otwarty w d wtedy i tylko wtedy gdy jest on otwarty w d'. Przeciwobrazem zbioru U przez Id jest ten sam zbiór U. Zatem powyższy warunek jest tożsamy z powiedzeniem, że U jest otwarty w d' (odpowiednio w d) wtedy i tylko wtedy gdy jego przeciwobraz przez Id jest otwarty w d (odpwiednio w d'). To jest to samo co ciągłość identyczności z (X, d) do (X, d') i z (X, d') do (X, d). □

Tomasz Downarowicz