T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
WYKŁAD 4

WŁASNOŚCI METRYCZNE VS TOPOLOGICZNE

Wrocław, 19 marca 2010

HOEMEOMORFIZM I IZOMETRIA

Rozważamy dwie przestrzenie metryczne (X, d_X) i (Y, d_Y). Przypomnijmy, że funkcja $\phi : X \to Y$ jest *odwracalna* (inaczej bijekcja) jeśli jest różnowartościowa (inaczej 1-1, lub injekcja) oraz ,,na" (surjekcja). Istnieje wtedy funkcja odwrotna $\phi^{-1} : Y \to X$ spełniająca $\phi^{-1}(\phi(x)) = x$.

Definicja 1. *Homeomorfizmem* pomiędzy (X, d_X) i (Y, d_Y) nazywamy odwracalną funkcję $\phi : X \to Y$, która jest ciągła i odwrotna do niej ϕ^{-1} też jest ciągła.

Oto równoważne (każdy z osobna) warunki na to, aby bijekcja ϕ była homeomorfizmem:

$$\forall_{U \subset X} \quad U \in \mathcal{T}_X \iff \phi(U) \in \mathcal{T}_Y \tag{1}$$

$$\forall_{(x_n) \subset X, x \in X} \quad \lim_n x_n = x \iff \lim_n \phi(x_n) = \phi(x) \tag{2}$$

Definicja 2. *Izometrią* pomiędzy (X, d_X) i (Y, d_Y) nazywamy surjekcję $\phi : X \to Y$ taką, że $\forall_{x,y \in X} \quad d_X(x, y) = d_Y(\phi(x), \phi(y))$.

Każda surjekcja jest homeomorfizmem (to jest łatwe ćwiczenie), ale nie na odwrót.

Przestrzenie miedzy którymi istnieje homeomorfizm nazywamy *homeomorficznymi.* Ponieważ złożenie dwóch homeomorfizmów jest homeomorfizmem, ,,homeomorficzność" jest relacją równoważności wśród przestrzeni metrycznych. Własność przestrzeni metrycznej (na przykład zwartość, lub spójność, które kiedyś poznamy) jest *topologiczna* jeśli jest zachowywana przez homeomorfizmy, tzn. mają ją jednocześnie wszystkie (lub żadna) przestrzeń z danej klasy homeomorficzności. Podobnie własność podzbioru A przestrzeni (X, d) (na przykład domkniętość, nigdzie gęstość, itp.) jest *topologiczna* jeśli przy zastosowaniu dowolnego homeomorfizmu $\phi : X \to Y$ obraz $\phi(A)$ też ma tą własność w przetsrzeni Y.

Przestrzenie miedzy którymi istnieje izometria nazywamy *izometrycznymi.* Też jest to relacja równoważności. Własności zachowywane przez izometrię nazywamy *metrycznymi.* Każda własność topologiczna jest oczywiście metryczna, ale nie na odwrót. Przykładami własności metrycznych ale nie topologicznych są ograniczoność i zupełność, które poznamy dzisiaj.

PRZYKŁADY:

1. Odcinek $[0, 1)$ i półprosta $[0, \infty)$ są homeomorficzne. Homeomorfizmem $\phi : [0, 1) \to [0, \infty)$ jest na przykład $\phi(x) = -\log(1 - x)$ (wtedy funkcja odwrotna to $\phi^{-1}(y) = 1 - e^{-y}$.

2. Koło otwarte K jest izomorficzne z płaszczyzną Π i z kwadratem otwartym S. Koło otwarte o środku w początku układu i promieniu 1 we współrzędnych kartezjańskich to $K = \{(r, \varphi) : \varphi \in [0, 2\pi), r \in [0, 1)\}$. Wtedy homeomorfizmem $\Phi : K \to \Pi$ jest $\Phi((r, \varphi)) = (\phi(r), \varphi)$, gdzie ϕ jest wzięte z poprzedniego przykładu.

Natomiast kwadrat otwarty S zapisany we współrzędnych kartezjańskich, to $S = \{(x,y) : x \in (-1,1), y \in (-1,1)\}$. Wtedy homeomorfizmem $\Psi : S \to \Pi$ jest $\Psi((x,y)) = (\pm\phi(|x|), \pm\phi(|y|))$, gdzie znaki $\pm$ są takie jak przy x i y, odpowiednio. Homeomorfizm z K do S (lub odwrotnie) można teraz uzyskać składając Φ i Ψ^{-1} (lub odwrotnie).

3. Płaszczyzna z metryką taksówkową jest izometryczna z płaszczyzną z metryką maksimum. Izomorfizm to funkcja $\phi((x,y)) = (x+y, x-y)$. Dowód: Po pierwsze każdy układ równań $t = x+y,\ s = x-y)$ jest ozanczony, więc ma rozwiązanie (x,y), co oznacza, że ϕ jest surjekcją. Sprawdzimy zachowywanie metryki. Otóż

$$\begin{aligned} d_{max}(\phi((x,y)), \phi((x',y'))) = d_{max}((x+y, x-y), (x'+y', x'-y')) = \\ \max\{|(x+y)-(x'+y')|, |(x-y)-(x'-y)'|\} = \\ \max\{|(x-x')+(y-y')|, |(x-x')-(y-y)'|\} = \\ |x-x'| + |y-y'| = d_{tax}((x,y),(x',y')). \end{aligned}$$

(Skorzystaliśmy z równości, że maximum modułów sumy i różnicy dwóch liczb to suma ich modułów.)

PODPRZESTRZEŃ

Dana jest przestrzeń metryczna (X,d) i pozdbiór $A \subset X$. Podzbiór ten można traktować jako przestrzeń metryczną z tą samą metryką d (formalnie trzeba d obciąć do $A \times A$, ale to jest jakby automatyczne, gdyż rozważając A jako przestrzeń będziemy po prostu stosować metykę d do mierzenia odległości tylko między punktami zbioru A). Powstałą tak przestrzeń metryczną (A,d) nazywamy *podprzestrzenią* przestrzeni (X,d). Z kolei (X,d) jest dla przestrzeni (A,d) *nadprzestrzenią*.

Własność jakiegoś zbioru $B \subset X$, którą to własność zbiór B ma również rozpatrywany jako podzbiór podprzestrzeni (A,d) i tak jest dla każdej podprzestrzeni (A,d) zawierającej B, nazywamy własnością *dziedziczną*. Natomiast własność zbioru, która zachowuje się przy przejściu do dowolnej nadprzestrzeni nazywamy *antydziedziczną*.
Poniższa tabela przedstawia poznane własności (* oznacza własności, które poznamy później) oraz ich klasyfikację.

własność	*metryczna*	*topologiczna*	*dziedziczna*	*antydziedziczna*
otwartość	tak	tak	tak	**nie**
domkniętość	tak	tak	tak	**nie**
brzegowość	tak	tak	**nie**	tak
gęstość	tak	tak	tak	**nie**
nigdzie gęstość	tak	tak	**nie**	tak
ograniczoność	tak	**nie**	tak	tak
zbieżność (ciągu)	tak	tak	**nie**	tak
podstawowość (ciągu)	tak	**nie**	tak	tak
zupełność	tak	**nie**	tak	tak
zwartość*	tak	tak	tak	tak
spójność*	tak	tak	tak	tak

OGRANICZONOŚĆ

Definicja 3. Zbiór A (lub cała przestrzeń) jest *ograniczony*, jeśli istnieje kula $K(x,r)$ zawierająca A.

Twierdzenie 1. Każdy ciąg (x_n) zbieżny jest (jako zbiór) ograniczony.

Dowód: Jeśli x jest granicą, to istnieje takie n_0, że wszystkie wyrazy o numerach powyżej n_0 są w kuli $K(x,1)$. Niech $r = \max\{1, d(x,x_n) : n = 1,2,\dots,n_0\} + \epsilon$. Wtedy cały ciąg jest zawarty w kuli $K(x,r)$. $\square$

PRZYKŁAD: Rozważmy dowolną nieograniczoną przestrzeń (X,d) (na przykład prostą). W tej samej przestrzeni wprowadzamy metrykę $\overline{d} = \min\{d, d_{dyskr}\}$ (wiemy z ćwiczeń, że to jest metryka). Otóż metryki te są równoważne, co oznacza, że (X,d) i $(X,\overline{d})$ są homeomorficzne poprzez identyczność. Wynika to z faktu, że zbieżność (w każdej z tych metryk) zależy tylko od małych wartości metryki, a te są dla obu metryk takie same. Jednak $(X,\overline{d})$ jest ograniczona, podczas gdy (X,d) nie. W ten sposób udowodniliśmy twierdzenie:

Twierdzenie 2. Każda przestrzeń metryczna jest homeomorficzna z pewną przestrzenią ograniczoną. $\square$

CIĄGI PODSTAWOWE, ZUPEŁNOŚĆ

Definicja 4. Ciąg (x_n) w przestrzeni metrycznej nazywa się *podstawowy* (albo *Cauchy'ego*), jeśli
$$\forall_{\epsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathbb{N}}\ \forall_{m,n\geq n_0}\ \ d(x_n,x_m)<\epsilon.$$

Podstawowość to "prawie to samo" co zbieżność, jest jednak własnością wewnętrzną ciągu (nie zależy od obiektu zewnętrznego, jakim jest punkt graniczny), dlatego jest dziedziczna i antydziedziczna, czyli nie zależy od rozważanej przestrzeni. Zbieżność ciągu można łatwo "zniszczyć" usuwając z przestrzeni punkt graniczny, ale podstawowość zostaje. Podstawowość nie jest jednak własnością topologiczną, podczas gdy zbieżność jest!

Twierdzenie 3. Każdy ciąg zbieżny jest podstawowy.

Dowód: Niech $x_n \to x$. Ustalmy $\epsilon > 0$ i niech n_0 spełnia $\forall_{n\geq n_0}\ d(x_n,x) < \frac{\epsilon}{2}$. Wtedy dla dowolnych $m,n \geq n_0$ mamy $d(x_n,x_m) \leq d(x_n,x) + d(x,x_m) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. $\square$

Twierdzenie 4. Na prostej $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ każdy ciąg podstawowy jest zbieżny.

Dowód: Niech $(x_n) \subset \mathbb{R}$ będzie podstawowy. Niech n_k oznacza numer powyżej którego $|x_n - x_m| < \frac{1}{2^{k+1}}$. Niech $a_k = x_{n_k} - \frac{1}{2^k}$ i $b_k = x_{n_k} + \frac{1}{2^k}$. Pokażemy, że ciąg (a_k) rośnie: Mamy $|x_{n_k} - x_{n_{k+1}}| < \frac{1}{2^{k+1}}$, czyli $x_{n_{k+1}} > x_{n_k} - \frac{1}{2^{k+1}}$. Zatem

$$a_{k+1} = x_{n_{k+1}} - \frac{1}{2^{k+1}} > x_{n_k} - \frac{1}{2^{k+1}} - \frac{1}{2^{k+1}} = x_{n_k} - \frac{1}{2^k} = a_k.$$

Identycznie pokazuje się, że ciąg (b_k) maleje: $x_{n_{k+1}} < x_{n_k} + \frac{1}{2^{k+1}}$, więc

$$b_{k+1} = x_{n_{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} < x_{n_k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} = x_{n_k} + \frac{1}{2^k} = b_k.$$

Ponadto dla każdego k mamy: $a_k \leq x_n \leq b_k$ gdzie n jest dowolnym numerem większym lub równym n_k. Ciąg (a_k) jest ograniczony z góry na przykład przez b_1, a ciąg (b_k) – z dołu przez a_1. Stąd oba te ciągi są zbieżne. Niech a i b oznacza granice tych ciągów, odpowiednio. Pokażemy, że $a = b$. Dla dowolnego $\epsilon > 0$ mamy

$$d(a,b) \leq d(a,a_k) + d(a_k,b_k) + d(b_k,b) \leq \epsilon + \frac{1}{2^{k-1}} + \epsilon$$

(trzeba do tego wziąć odpowiednio duże k). Ale suma po prawej jest dowolnie mała, więc $d(a, b) = 0$. Zatem $a = b$. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika teraz, że ciąg (x_n) również zbiega do a. $\square$

Uwaga: Powyżej zastosowano zmodyfikowaną wersję tw. o trzech ciągach. Nie mamy nierówności $a_n \le x_n \le b_n$, *tylko* $a_k \le x_n \le b_k$ *dla* $n = n_k, n_k + 1, \dots, n_{k+1}$ *(w szczególności, bo nierówność działa również dla wyższych numerów* n*). Ale to wystarczy. Trzeba zdefiniować nowe ciągi* a'_n *i* b'_n *następująco:* $a'_n = a_k$ *i* $b'_n = b_k$ *dla* $n = n_k, n_k + 1, \dots, n_{k+1}$*. Wtedy zajdą nierówności* $a'_n \le x_n \le b'_n$*, oraz ciągi* a'_n *i* b'_n *mają te sam granice co* a_k *i* b_k*.*

Implikacja z podstawowości do zbieżności nie zachodzi we wszystkich przestrzeniach metrycznych. Na przykład w przestrzeni $(0, 1)$ ciąg $(\frac{1}{n})$ jest podstawowy, ale nie zbieżny (nie ma granicy). Przestrzenie, w których implikacja taka zachodzi, mają specjalną nazwę:

Definicja 5. Przestrzeń metryczna nazywa się *zupełna* jeśli każdy ciąg podstawowy w tej przestrzeni jest zbieżny.

Zupełność jest własnością metryczną, ale nie topologiczną. Na przykład prosta rzeczywista $(\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$ jest zupełna, ale homeomorficzna z nią przestrzeń $((0, 1), |\cdot - \cdot|)$ nie! (patrz powyżej ciąg $(\frac{1}{n})$).

Tomasz Downarowicz