T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
WYKŁAD 5

ZUPEŁNOŚĆ, OŚRODKOWOŚĆ, PRZESTRZEŃ POLSKA

Wrocław, 26 marca 2010

ZUPEŁNOŚĆ

Twierdzenie 1. Niech (X, d) będzie przestrzenią zupełną, i niech $A \subset X$. Wtedy następujące warunki są równoważne:
1. Podprzestrzeń (A, d) jest zupełna,
2. A jest domknięty w X.

UWAGA: Jest to niebanalne, bowiem zupełność nie jest własnością topologiczną, natomiast domkniętość jest. Z kolei zupełność nie zależy od tego, w jakiej większej przestrzeni rozważamy zbiór A, a domkniętość zależy. Tak więc równoważność w twierdzeniu MUSI wymagać dodatkowych założeń. Tutaj jest to zupełność (X, d).

Dowód: Niech (A, d) będzie zupełna. Pokażemy, że A jest domknięty w X (to będzie prawda nawet bez założenia o zupełności X). Niech (x_n) będzie ciągiem w A zbieżnym do jakiegoś $x \in X$. Mamy pokazać, że $x \in A$. Skoro (x_n) jest zbieżny w X, to jest podstawowy w X. To jest własność wewnętrzna ciągu, więc (x_n) jest też podstawowy w A. Z zupełności A, ciąg (x_n) jest zbieżny w A, do jakiegoś $y \in A$. Ale oczywiście $y \in X$ i zbieżność do y jest też w X. Zatem w X ciąg (x_n) jest zbieżny zarówno do x jak i do y. Z jednoznaczności granicy dostajemy $x = y$. Ponieważ $y \in A$ to i $x \in A$, a o to nam chodziło.
W drugą stronę (teraz już zupełność X będzie ważna): Zakładamy, że A jest domknięty, mamy pokazać, że jako przestrzeń jest zupełny. Niech (x_n) będzie ciągiem podstawowym w A. Ponieważ jest to własność wewnętrzna, (x_n) jest też podstawowy w X. Z założenia o zupełności X, (x_n) jest zbieżny do jakiegoś $x \in X$. Teraz z domkniętości A wynika, że $x \in A$. Skoro ciąg i jego granica należą do A, to zbieżność $x_n \to x$ zachodzi w A. Pokazaliśmy, że dowolny ciąg podstawowy w A jest w nim zbieżny, czyli zupełność A. $\square$

PRZYKŁADY: Możemy teraz podać przykłady przestrzeni zupełnych: wiedząc, że $\mathbb{R}$ jest zupełna wystarczy brać domknięte podzbiory: $(-\infty, 0]$, $[1, \infty)$, $[0, 1]$, $\{0\}$, itp. Zauważmy, że $(0, 1]$ nie jest domknięty, więc nie jest zupełny. Ale jest on homeomorficzny z $[1, \infty)$ (poprzez funkcję $\frac{1}{x}$). Widać z tego, że zupełność nie jest własnością topologiczną (nie zachowuje się przez homeomorfizm).

Przykładu zupełnej przestrzeni funkcyjnej dostarcza poniższe twierdzenie:

Twierdzenie 2. Przestrzeń $C([0, 1])$ funkcji ciągłych na $[0, 1]$ z metryką jednostajną jest zupełna.

Dowód: Wymaga narzędzia: zbieżności jednostajnej. Będzie kontynuowany po definicji i lemacie.

Definicja 1: Ciąg funkcji (f_n) określonych na przestrzeni metrycznej (X, d) o watrościach w przestrzeni metrycznej (Y, e) jest *jednostajnie zbieżny* do funkcji f, jeśli zbieżność zachodzi w metryce supremum, czyli

$$\forall_{\epsilon > 0}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n \geq n_0} \sup_{x \in X} e(f_n(x), f(x)) < \epsilon \text{ (lub } \forall_{\epsilon > 0}\, \exists_{n_0}\, \forall_{n \geq n_0}\, \forall_x\, e(f_n(x), f(x)) < \epsilon).$$

Piszemy wtedy $f_n \rightrightarrows f$ (proszę nie mylić z $\implies$).

Lemat: Jeśli $f_n \rightrightarrows f$ i wszystkie f_n są ciągłe, to granica f też jest ciągła.

Dowód: Ustalmy $x_0 \in X$. Pokażemy ciągłość f w tym punkcie. Ustalmy $\epsilon > 0$. Istnieje n_0 takie, że powyżej tego numeru (czyli dla $n \geq n_0$) zachodzi

$$e(f_n(x), f(x)) < \tfrac{\epsilon}{3}$$

dla wszystkich $x \in X$ (to jest właśnie jednostajna zbieżność). Ustalmy dowolne $n \geq n_0$. Funkcja f_n jest ciągła w x_0, zatem istnieje $\delta > 0$ taka, że

$$d(x, x_0) < \delta \implies e(f_n(x), f_n(x_0)) < \tfrac{\epsilon}{3}.$$

Teraz, dla wszystkich x takich, że $d(x, x_0) < \delta$ mamy

$$e(f(x), f(x_0)) \leq e(f(x), f_n(x)) + e(f_n(x), f_n(x_0)) + e(f_n(x_0), f(x_0)) \leq 3 \cdot \tfrac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

To dowodzi ciągłości f w x_0. $\square$

Możemy teraz udowodnić Twierdzenie 2.

Dowód Twierdzenia 2: Niech (f_n) będzie ciągiem podstawowym w metryce supremum. Wtedy dla każdego $x \in X$ ciąg $f_n(x)$ jest podstawowy w $\mathbb{R}$. Z zupełności $\mathbb{R}$ istnieje granica. Możemy zatem określić funkcję $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Jest to funkcja rzeczywista na X, ale nie wiemy czy ciągła, i czy zbieżność jest jednostajna. Jeśli sprawdzimy jednostajność zbieżności, to ciągłość f wyniknie z powyższego lematu. Ustalmy $\epsilon > 0$. Istnieje n_0 takie, że dla $n, m \geq n_0$ mamy

$$\sup_{x \in X} e(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon, \quad \text{czyli} \quad \forall_{x \in X}\ e(f_n(x), f_m(x)) < \epsilon.$$

Wtedy, dla każdego x można przejść z m do granicy:

$$\forall_{x \in X}\ e(f_n(x), f_m(x)) \leq \epsilon.$$

Wyszła nieostra nierówność, bo granica liczb mniejszych od ϵ może być mu równa, ale to oczywiście nie szkodzi. To jest właśnie jednostajna zbieżność i koniec dowodu. $\square$

Przy okazji przypomnimy teraz definicję jednostajnej ciągłości. Na razie nie będziemy z niej korzystać, ale przypomnieć warto:

Definicja 2: Funkcja f określona na przestrzeni metrycznej (X, d) o watrościach w przestrzeni metrycznej (Y, e) jest *jednostajnie ciągła*, gdy

$$\forall_{\epsilon > 0}\ \exists_{\delta > 0}\ \forall_x\ \forall_y\ d(x, y) < \delta \implies e(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Różnica między ciągłością jednostajną a zwykłą polega na tym, że dobór δ do ϵ jest uniwersalny dla wszystkich x, podczas gdy dla zwykłej ciągłości zależy od x: kwantyfikator $\forall_x$ jest na początku ($\forall_y$ nie ruszamy).

Często potrzebny jest fakt z analizy, którego nie będziemy na razie dowodzić (kiedyś tak, i to w ogólniejszej wersji). Teraz przytoczymy go bez dowodu:

Lemat: Każda funkcja ciągła na przedziale $[0, 1]$ jest jednostajnie ciągła.

OŚRODKOWOŚĆ

Ośrodkowość jest kolejną bardzo ważną własnością topologiczną przestrzeni (na ćwiczenia). Uogólnia ona (jak wiele innych własności) coś, co posiada prosta $\mathbb{R}$.

Definicja 3: Przestrzeń metryczna (X,d) jest *ośrodkowa* jeśli istnieje w niej podzbiór przeliczalny gęsty. Podzbiór taki nazywamy *ośrodkiem*.

PRZYKŁADY:
1. $\mathbb{R}$ jest ośrodkowa, bo zawiera $\mathbb{Q}$. Podprzestrzeń $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ też jest ośrodkowa, bo zawiera na przykład $\mathbb{Q}+\pi$. Ogólnie: każda podprzestrzeń przestrzeni ośrodkowej jest ośrodkowa (na ćwiczenia).
2. $C([0,1])$ jest ośrodkowa. Ośrodkiem jest na przykład zbiór wszystkich funkcji łamanych (tzn. wykresem jest łamana o skończenie wielu odcinkach) o wierzchołkach wymiernych (tzn. obie współrzędne mają być wymierne).
3. $\mathbb{R}$ z metryką dyskretną nie jest ośrodkowa, bo jedyny zbiór gęsty w metryce dyskretnej, to cała przestrzeń.

PRZESTRZEŃ POLSKA

Definicja 4: Przestrzeń metryczna nazywa się *polska* (chodzi o przymiotnik; po angielsku pisze się od dużej lietry: Polish space (polish space oznaczałoby ,,wypoleruj przestrzeń")), jeśli jest ona homeomorficzna z przestrzenią ośrodkową i zupełną. Nazwa została nadana dla upamiętniena wkładu polskich matematyków, głównie Sierpińskiego, Kuratowskiego i Tarskiego, w badanie takich przestrzeni.

Polskość jest własnością topologiczną, gdyż w definicji mówi się, że ma być homeomorficzna (z czymś). Więc z przechodniości relacji homeomorficzności każda przestrzeń homeomorficzna z polską jest polska.

PRZYKŁADY: Wszelkie przestrzenie ośrodkowe zupełne, ale też na przykład $(0,1)$, która, choć zupełna nie jest, ale za to jest homeomorficzna z $\mathbb{R}$. Inny przykład to $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}$. Również $\mathbb{IQ}$, ale to już jest o wiele trudniejsze do wykazania. Może kiedyś to zrobimy.

Tomasz Downarowicz