T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni
WYKŁAD 6

TWIERDZENIE BANACHA O PUNKCIE STAŁYM

Wrocław, 9 kwietnia 2010

Będziemy mówić o "przekształceniu" przestrzeni metrycznej w siebie: $f : X \to X$. Przekształcenie takie można *iterować*, to znaczy składać ze sobą dowolną ilość razy. W ten sposób powstają *potęgi iteracyjne* $f^n = f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f$ (n razy). Dodatkowo umawiamy się, że f^0 jest odwzorowaniem identycznościowym na X. Para (X, f) nazywa się *układem dynamicznym.* W układzie dynamicznym interesować nas będą *orbity* punktów:

Definicja 0. *Orbitą* (lub *trajektorią*) punktu $x \in X$ w układzie dynamicznym (X, f) nazywamy ciąg $(x_n)_{n\geq 0}$ zadany wzorem $x_n = f^n(x)$.

Zaczniemy jednak od warunku dotyczącego dowolnej funkcji z jednej przestrzeni metrycznej w drugą:

WARUNEK LIPSCHITZA

Definicja 1. Funkcja $f : (X, d) \to (Y, e)$ spełnia *warunek Lipshitza* (lub jest *lipschitzowska*) jeśli istnieje stała dodatnia c taka, że

$$\forall_{x,x'\in X}\ e(f(x), f(x')) \leq cd(x, x').$$

Funkcja lipschitzowska jest zawsze ciągła, a nawet jednostajnie ciągła (na ćwiczenia).

PRZYKŁAD. Jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (dziedziną może też być dowolny odcinek lub półprosta) ma w każdym punkcie pochodną, i pochodna ta jest ograniczona: $|f'| \leq M$ ($M > 0$), to f jest lipschitzowska ze stałą $c = M$.

Dowód: Z Twierdzenia Lagrange'a mamy $\frac{f(x)-f(x')}{x-x'} = f'(z)$, gdzie $z \in [x, x']$. Skoro tak, to moduł tego ilorazu jest mniejszy lub równy M. Czyli, mnożąc przez $|x - x'|$ dostajemy $|f(x) - f(x')| \leq M|x - x'|$. $\square$

Definicja 2. Funkcję $f : (X, d) \to (X, d)$ nazywamy *odwzorowaniem zbliżającym*, jeśli po pierwsze (jak widać) dziedzina i przeciwdziedzina są te same i po drugie spełniony jest warunek Lipschitza ze stałą $c < 1$.

PRZYKŁAD. Oto przykład odwzorowania, które NIE JEST zbliżające, pomimo tego, że zbliża dowolne dwa punkty: $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x+1}$. Pochodna wynosi $1 - \frac{1}{(1+x)^2}$ czego moduł jest w każdym punkcie mniejszy od 1 (stąd zawsze $|f(x) - f(x')| < |x - x'|$), jednak nie ma stałej $c < 1$, która ogranicza pochodną. Jest to funkcja lipschitzowska ze stałą 1.

GŁÓWNE TWIERDZENIE

Twierdzenie 1. (Bancha o odwzorowaniu zbliżającym, lub o punkcie stałym). Dany jest układ (X, f), gdzie X jest przestrzenią metryczną zupełną, a $f : X \to X$ jest odwzorowaniem zbliżającym. Wtedy istnieje jedyny punkt stały ξ przekształcenia f, tzn. taki, że $f(\xi) = \xi$ i orbita każdego punktu zbiega do ξ.

Dowód: Pokażemy trzy zasadnicze fakty w następującej kolejności:

1. Każda orbita jest ciągiem Cauchy'ego (z zupełności będzie to oznaczać zbieżność).
2. Granica orbity jest punktem stałym.
3. Punkt stały jest jedyny.

Zaczniemy od lematu:

Lemat. Dla dowolnego $x \in X$ i $n \geq 0$ mamy: $d(x_n, x_{n+1}) \leq c^n d(x, f(x))$.

Dowód. Indukcyjnie: dla $n = 0$ warunek oznacza $d(x_0, x_1) \leq c^0 d(x, f(x))$, a to jest oczywista równość. Załóżmy, że warunek ten jest spełniony dla jakiegoś $n \geq 0$. Mamy go udowodnić dla $n+1$. Otóż

$$d(x_{n+1}, x_{n+2}) = d(f(x_n), f(x_{n+1})) \leq cd(x_n, x_{n+1}) \leq c \cdot c^n d(x, f(x)) = \\ = c^{n+1} d(x, f(x)). \quad \square$$

Wracamy do głównego dowodu. Ad 1. Weźmy dowolny punkt x (będzie to nasz punkt początkowy orbity). Szereg

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^n d(x, f(x))$$

jest szergiem geometrycznym o dodatnim ilorazie $c < 1$. Szereg taki jest zbieżny, a więc podstawowy. Dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje więc n_0 takie, że dla dowolnych $n < m$ większych od n_0 różnica sum częściowych n-tej i m-tej jest mniejsza od ϵ. Ta różnica, to suma od wyrazu $n+1$ do m. Czyli

$$\sum_{i=n+1}^{m} c^i d(x, f(x)) < \epsilon.$$

Oszacujemy teraz odległość x_n od x_m, dla $n+1$ i $m+1$ (czyli dowolnych numerów większych od $n_0 + 1$):

$$d(x_{n+1}, x_{m+1}) \leq d(x_{n+1}, x_{n+2}) + d(x_{n+2}, x_{n+3}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) + d(x_m, x_{m+1}).$$

Z lematu, prawa strona szacuje się przez

$$c^{n+1} d(x, f(x)) + c^{n+2} d(x, f(x)) + \cdots + c^{m-1} d(x, f(x)) + c^m d(x, f(x)) = \\ = \sum_{i=n+1}^{m} c^i d(x, f(x)) < \epsilon.$$

Zatem orbita spełnia warunek Cauchy'ego, więc jest zbieżna. Oznaczmy przez $\xi(x)$ granicę orbity startującej z punktu x.

Ad 2. Pokażemy, że $\xi(x)$ jest punktem stałym. Z ciągłości f mamy

$$f(\xi(x)) = f(\lim_n x_n) = \lim_n f(x_n) = \lim_n x_{n+1} = \lim_n x_n = \xi(x).$$

Ad 3. Gdyby były dwa punkty stałe, $\xi \neq \xi'$, to $d(\xi, \xi') > 0$ i można by prze tą liczbę dzielić. Wtedy

$$d(\xi, \xi') = d(f(\xi), f(\xi')) \leq cd(\xi, \xi').$$

Dzieląc przez $d(\xi, \xi')$ dostajemy $c \geq 1$, sprzeczność. Koniec dowodu. $\square$

PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

Twierdzenie Banacha, jak wszystkie twierdzenia o punkcie stałym, pozwala przede wszystkim stwierdzić (w określonych sytuacjach) ISTNIENIE punktu stałego, czyli rozwiązania jakiegoś problemu (np. równania różniczkowego, lub pierwiastka jakiejś funkcji). To twierdzenie daje dodatkowo JEDNOZNACZNOŚĆ takiego rozwiązania. Pozwala też na znalezienie przybliżonego rozwiązania (np. numerycznie) w formie dalekiego elementu orbity dowolnego punktu początkowgo (w przestrzeniach funkcyjnych punktem jest funkcja, a może to być jeszcze bardziej złożony obiekt). Na przykład przybliżone rozwiązanie równania różniczkowgo można nieraz dostać startując od dowolnej funkcji i stosując do niej wielokrotnie jakiś operator całkowy.
Innym zastosowaniem (odwróconym), jest ścisłe wyznaczanie granicy niektórych ciągów rekurencyjnych. Wystarczy znaleźć odpowiedni punkt stały, co czasem jest łatwiejsze niż liczenie granicy.

PRZYKŁADY.
1. Obliczymy granicę ciągu rekurencyjnego $a_0 = \pi$, $a_{n+1} = 1 - \frac{\pi}{4} + \arctan(a_n)$.

Znalezienie tej granicy metodą bezpośrednią wymagałoby: (a) obliczenia jawnego wzoru na a_n (jako funkcji n), (b) obliczenie granicy inną metodą. Już (a) wydaje się niemożliwe... Oczywiście można też numerycznie iterować wielokrotnie wzór rekurencyjny, ale wtedy dostaniemy jedynie przybliżenie granicy.

Rozważmy funkcję $f(x) = 1 - \frac{\pi}{4} + \arctan(x)$. Jej pochodna to $\frac{1}{1+x^2}$, która jest dodatnia i na przykład na półprostej $[0.1, \infty)$ mniejsza od $c = \frac{1}{1.01} < 1$. Ponadto wartości tej funkcji dla liczb x dodatnich są większe do $1 - \frac{\pi}{4} > 0.1$, z czego wynika, że półprosta $[0.1, \infty)$ jest przekształcana w siebie. Mamy zatem odwzorowanie zbliżające przestrzeni zupełnej $X = [0.1, \infty)$. Badany ciąg jest oczywiście niczym innym jak tylko orbitą punktu $x = \pi \in X$. Z twierdzenia Banacha wynika, że jego granicą jest punkt stały, ponadto taki punkt stały jest jedyny. Wystarczy zatem zznaleźć JAKIEKOLWIEK rozwiązanie równania $x = f(x)$, czyli $x = 1 - \frac{\pi}{4} + \arctan(x)$. Metodą "zgadywania" znajdyjemy takie rozwiązanie: jest nim $\xi = 1$, bowiem $f(\xi) = 1 - \frac{\pi}{4} + \arctan(1) = 1 - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 1 = \xi$. Zatem $\lim_n x_n = 1$.

2. Zbadaj istnienie i jednoznaczność rozwiązania równania całkowego $f = \int f\,dx$ z warunkiem początkowym $f(0) = 1$. ("Gołym okiem" widać, że rozwiązaniem jest funkcja e^x, ale czy jest ona jedyna?)

Na przestrzeni funkcyjnej zupełnej $C([0, 0.99])$ rozważmy operator T przypisujący funkcji ciągłej f jej funkcję pierwotną F spełniającą warunek początkowy $F(0) = 1$. Można to wyrazić tak:

$$T(f)(x) = 1 + \int_0^x f(t)\,dt.$$

Oczywiście obraz F jest również funkcją ciągłą określoną na tym samym przedziale, czyli należy do tej samej przestrzeni $C([0, 0.99])$. Czy T jest odwzorowaniem zbliżającym (w metryce supremum)? Oszacujmy w dowolnym $x \in [0, 0.99]$

$$|Tf(x), Tg(x)| = \left|\int_0^x f(t) - g(t)\,dt\right| \le \int_0^x |f(t) - g(t)|\,dt \le \int_0^{0.99} d_{\sup}(f, g)\,dt = \\ = 0.99 \cdot d_{\sup}(f, g).$$

Czyli jest to odwzorowanie lipschitzowskie ze stałą $0.99 < 1$. Z twierdzenia Banacha wynika teraz, że rozwiązanie $f(x) = e^x$ jest jedyne. Odpowiada to na pytanie w zadaniu, przynajmniej na odcinku $[0, 0.99]$. Dodatkowo wiemy, że startując z dowolnej funkcji ciągłej f na tym przedziale i iterując $T(T(T...T(f)...))$ będziemy zawsze zbliżać się do funkcji e^x.

Tomasz Downarowicz