TOPOLOGIA

WPPT I, sem. letni

WYKŁAD 7

Twierdzenie Hausdorffa o uzupełnianiu

Wrocław, 1 kwietnia 2008

Twierdzenie. *Niech (X, d) będzie dowolną przestrzenią metryczną. Wtedy istnieje przestrzeń metryczna zupełna (Y, e) i izometria $\phi : X \xrightarrow{w} Y$, taka że $\overline{\phi(X)} = Y$. Przestrzeń (Y, e) nazywamy* uzupełnieniem *przestrzeni (X, d). Uzupełnienie jest jedyne z dokładnością do izometrii, tzn., jeśli (Y, e) i (Z, f) są uzupełnieniami prezestrzeni (X, d), to istnieje odwracalna izometria $\Phi : Y \to Z$.*

Dowód. Niech $\mathcal{Y}$ oznacza zbiór wszystkich ciągów podstawowych (x_n) o elementach w X. W $\mathcal{Y}$ wprowadzamy relację $(x_n) \approx (y_n)$ jeśli $\lim_n d(x_n, y_n) = 0$. Łatwo sprawdza się, że jest to relacja równoważności (nawet w zbiorze wszystkich ciągów – nie tylko podstawowych). Niech $Y = \mathcal{Y}/_{\approx}$ (czyli zbiór klas równoważności względem tej relacji). Elementy Y są postaci $[(x_n)]$. W Y wprowadzamy metrykę e wzorem

$$e([(x_n)], [(y_n)]) = \lim_n d(x_n, y_n).$$

Najpierw trzeba zauważyć, że powyższa granica zawsze istnieje. To wynika z faktu, że ciągi (x_n) i (y_n) są podstawowe, z czego łatwo wyprowadza się, że ciąg liczbowy $d(x_n, y_n)$ też jest podstawowy, a zatem zbieżny. Sprawdzenie, że powyższa definicja metryki e nie zależy od wyboru ciągów reprezentujących dane klasy oraz że otrzymamy metrykę jest elementarne.

Teraz udowodnimy zupełność przestrzeni (Y, e). Rozważmy ciąg klas $([(x_n^k)])_{k\geq 1}$ podstawowy w e. Chcemy pokazać, że jest on zbieżny w Y, a więc wskazać jego granicę. Ustalmy ciąg ϵ_i malejący do zera. Z podstawowości, dla każdego i istnieje k_i (bierzemy najmniejsze możliwe) takie, że

$$\forall_{k,k'\geq k_i} \quad e([(x_n^k)], [(x_n^{k'})]) < \epsilon_i,$$

czyli (z tymi samymi kwantyfikatorami)

$$\lim_n d(x_n^k, x_n^{k'}) < \epsilon_i.$$

Zauważmy, że ponieważ za k_i bierzemy najmniejszy możliwy próg, powyżej którego spełniony jest odpowiedni warunek, to ciąg k_i jest niemalejący. Będzie to miało znaczenie w dalszej części dowodu. Ponadto dla każdego k, z podstawowości ciągu (x_n^k) istnieje $n_{i,k}$ takie, że

$$\forall_{n,m\geq n_{i,k}} \quad d(x_n^k, x_m^k) < \epsilon_i.$$

Tworzymy teraz nowy ciąg (x_i) wzorem

$$x_i = x_{n_{i,k_i}}^{k_i}.$$

To właśnie klasa $[(x_i)]$ tego ciągu okaże się granicą ciągu klas $([(x_n^k)])_{k\geq 1}$. Najpierw trzeba sprawdzić, że (x_i) jest ciągiem podstawowym (bo tylko wtedy mamy gwarancję, że jego klasa należy do Y). Ustalmy więc dowolny $\epsilon > 0$ i weźmy i_0 tak duże, aby $3\epsilon_{i_0} < \epsilon$. Dla dowolnych $i, j \geq i_0$ chcemy oszacować (przez ϵ) odległość $d(x_i, x_j)$. Mamy, dla dowolnego n,

$$d(x_i, x_j) \leq d(x_i, x_n^{k_i}) + d(x_n^{k_i}, x_n^{k_j}) + d(x_n^{k_j}, x_j).$$

Podstawiamy wzory na x_i i x_j oraz, ponieważ powyższa nierówność jest prawdziwa dla wszystkich n, możemy przejść do granicy po n. Otrzymamy

$$d(x_i, x_j) \leq \lim_n d(x_{n_{i,k_i}}^{k_i}, x_n^{k_i}) + \lim_n d(x_n^{k_i}, x_n^{k_j}) + \lim_n d(x_n^{k_j}, x_{n_{j,k_j}}^{k_j}).$$

Z definicji liczby n_{i,k_i} (gdzie korzystało się z podstawowości ciągu $x_n^{k_i}$) pierwsza granica jest nie większa niż ϵ_i, podobnie ostatnia jest nie większa niż ϵ_j, łącznie nie przekracza to $2\epsilon_{i_0}$. Środkowa granica to odległość $e([(x_n^{k_i})], [(x_n^{k_j})])$. Ponieważ $k_i, k_j \geq k_{i_0}$ (tu właśnie korzystamy z monotoniczności ciągu k_i), to zgodnie z definicją liczby k_{i_0}, ta odległość również nie przekracza ϵ_{i_0}. Łącznie $d(x_i, x_j) \leq 3\epsilon_{i_0} < \epsilon$, co kończy dowód podstawowości ciągu (x_i).

Teraz trzeba pokazać, że ciąg klas $[(x_n^k)]$ zbiega (po k i w metryce e) do klasy $[(x_i)]$. Ponieważ ciąg ten jest z założenia podstawowy wystarczy pokazać zbieżność jego podciągu. Wybieramy do tego podciąg o indeksach k_i. Aby nie było kolizji indeksów, ciąg graniczny oznaczmy przez (x_n). Zgodnie z definicją metryki e musimy zatem pokazać, że ciąg liczbowy r_i zdefiniowany jako

$$r_i = e([(x_n^{k_i})], [(x_n)]) = \lim_n d(x_n^{k_i}, x_n)$$

zbiega do zera (po i). Ustalmy znowu $\epsilon > 0$. Trzeba pokazać, że dla dostatecznie dużego i, $\lim_n d(x_n^{k_i}, x_n) < \epsilon$. Podobnie jak poprzednio weźmy i_0 tak duże aby $4\epsilon_{i_0} < \epsilon$ i rozważmy dowolne $i \geq i_0$. Mamy

$$d(x_n^{k_i}, x_n) \leq d(x_n^{k_i}, x_i) + d(x_i, x_n) = d(x_n^{k_i}, x_{n_{i,k_i}}^{k_i}) + d(x_i, x_n).$$

Można założyć, że n jest duże (większe niż n_{i,k_i} i niż i), a wtedy pierwszy człon jest nie większy niż ϵ_i, a drugi (z poprzednich wyliczeń), niż $3\epsilon_{i_0}$. Łącznie nie przekracza to $4\epsilon_{i_0}$ a więc i ϵ, zatem badana granica po n również nie przekracza ϵ, tak jak chcieliśmy. To kończy dowód zupełności przestrzeni (Y, e).

Następny etap dowodu to wskazanie izometrii $\phi : X \to Y$. Jest ona bardzo prosta: $\phi(x) = [(x)]$ (tutaj (x) oznacza ciąg stały o wszystkich wyrazach równych x). Oczywiście każdy ciąg stały jest podstawowy, więc obraz każdego x faktycznie należy do Y. Sprawdzamy warunek na izometrię:

$$e(\phi(x), \phi(y)) = e([(x)], [(y)]) = \lim_n d(x, y) = d(x, y).$$

Ostatni krok to gęstość obrazu X w Y. Weźmy dowolny element Y postaci $[(x_n)]$. Twierdzimy, że jest on granicą ciągu elemenów z $\phi(X)$. Faktycznie, ciągiem tym jest $\phi(x_n)$. Bowiem ustalmy n_0 i zbadajmy odległość

$$e(\phi(x_{n_0}), [(x_n)]) = \lim_n (x_{n_0}, x_n).$$

Z podstawowości ciągu (x_n), granica ta jest mała (mniejsza od ϵ) gdy n_0 jest dostatecznie duże. To dowodzi, że ciąg $\phi(x_{n_0})$ zbiega do elementu $[(x_n)]$ w e gdy $n_0 \to \infty$ (po drodze zmieniliśmy indeksowanie ciągu $\phi(x_n)$ na $\phi(x_{n_0})$, ale to nie ma znaczenia).

Udowodniliśmy istnienie uzupełnienia (Y, e) przestrzeni (X, d). Teraz zajmiemy się jedynością takiego uzupełnienia (z dokładnością do izometrii). Niech (Y, e) i (Z, f) będą uzupełnieniami (X, d). Mamy wskazać odwracalną izometrię pomiędzy Y a Z. Wiemy, że istnieją izometrie $\phi : X \to Y$ i $\psi : X \to Z$, obie o gęstych obrazach. Weźmy dowolny element $y \in Y$. Jest on granicą ciągu $\phi(x_n)$. Ciąg ten, jako zbieżny, jest podstawowy (w (Y, e)). Ponieważ ϕ jest izometrią, ciąg x_n też jest podstawowy w (X, d). Ponieważ ψ jest izometrią, ciąg $\psi(x_n)$ jest podstawowy w (Z, f). Z zupełności (Z, f), istnieje granica $z = \lim \psi(x_n)$. Zdefiniujmy

$$\Phi(y) = z.$$

Najpierw trzeba sprawdzić, że definicja ta nie zależy od wyboru ciągu (x_n) takiego, że $\phi(x_n) \to y$. Niech x'_n będzie drugim ciągiem o własności $\phi(x'_n) \to y$. Wtedy ciąg "mieszany" a_n o wyrazach $a_{2n} = \phi(x_n), a_{2n+1} = \phi(x'_n)$ też jest zbieżny do y. A więc jest on podstawowy. Jak poprzednio, (przechodząc przez dwie izometrie) widzimy, że podstawowy (a więc zbieżny) jest ciąg b_n o wrazach $b_{2n} = \psi(x_n), b_{2n+1} = \psi(x'_n)$. Poniważ wiemy już, że podciąg parzysty zbiega do elemntu oznaczonego jako z, więc cały ten ciąg zbiega do z, w szczególności podciąg nieparzysty zbiega również do z. Ale granica ciągu nieparzystego to właśnie ten element przestrzeni Z, który przyporządkowalibyśmy jako $\Phi(y)$ gdyby do definicji użyć ciągu x'_n w miejsce ciągu x_n. Skoro w obu przypadkach wychodzi ten sam element z, to definicja Φ nie zależy od wyboru ciągu x_n.

Teraz pokażemy, że Φ jest izometrią. Weźmy $y, y' \in Y$ i ciągi (x_n) oraz (x'_n) takie, że $\phi(x_n) \to y$ i $\phi(x'_n) \to y'$. Z ciągłości metryki mamy

$$e(y, y') = \lim_n e(\phi(x_n), \phi(x'_n)) = \lim_n d(x_n, x'_n) = \lim_n f(\psi(x_n), \psi(x'_n)) = f(z, z'),$$

gdzie skorzystaliśmy z tego, że ϕ i ψ są izometriami, a potem przez z i z' oznaczyliśmy odpowiednio granice ciągów $\psi(x_n)$ i $\psi(x'_n)$. Ale zgodnie z definicją odwzorowania Φ mamy $z = \Phi(y)$ oraz $z' = \Phi(y')$. Ostatecznie dostaliśmy $e(y, y') = f(\Phi(y), \Phi(y'))$, czyli że Φ jest izometrą.

Absolutnie ostatnia rzecz do sprawdzenia, to odwracalność Φ. Jako izometria jest to odwzorowanie różnowartościowe, pozostaje więc tylko sprawdzenie, że jest ono „na". Weźmy dowolny element $z \in Z$. Wiemy, że $\psi(X)$ jest gęste w Z, więc istnieje ciąg $\psi(x_n) \to z$. Podobnie jak poprzednio (tylko zmieniając role Y i Z oraz ϕ i ψ), przechodząc przez podstawowość, dwie izometrie i zupełność przestrzeni (Y, e) wnioskujemy, że ciąg $\phi(x_n)$ zbiega w (Y, e) do jakiegoś elementu y. Twierdzimy, że $\Phi(y) = z$ (tego nam potrzeba do surjektywności Φ). Aby znaleźć obraz $\Phi(y)$ wystarczy wziąć jakikolwiek ciąg elementów obrazu $\phi(X)$ zbieżny do y (bo wiemy, że defincja $\Phi(y)$ nie zależy od wyboru tego ciągu). Ale my już mamy jeden taki ciąg, mianowicie $\phi(x_n)$, możemy więc wyznaczyć $\Phi(y)$ przy pomocy tego właśnie ciągu. Zgodnie z przepisem $\Phi(y)$ odnajdziemy jako granicę ciągu $\psi(x_n)$. Ale wiemy już, że $\psi(x_n)$ zbiega właśnie do z. Zatem $\Phi(y) = z$, tak jak chcieliśmy. $\square$

Tomasz Downarowicz