TOPOLOGIA

WPPT I, sem. letni
WYKŁAD 8
Zwartość

Wrocław, 21 kwietnia 2008

DEFINICJE

Niech (X,d) oznacza przestrzeń metryczną.

Definicja 1. (X,d) jest *całkowicie ograniczona* jeśli dla każdego $\epsilon > 0$ X jest zawarta w skończonej sumie kul o promieniu ϵ.

Definicja 2. (X,d) jest *metrycznie zwarta* jeśli jest całkowicie ograniczona i zupełna.

Definicja 3. (X,d) jest *ciągowo zwarta* gdy każdy ciąg zawiera podciąg zbieżny.

Definicja 4. Przez *rodzinę scentrowaną* rozumiemy rodzinę domkniętych podzbiorów $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ przestrzeni X takich, że każdy układ skończony $\{F_{\alpha_1}, F_{\alpha_2}, \ldots, F_{\alpha_k}\}$ ma przekrój niepusty. Na przykład każdy zstępujący ciąg (F_n) niepustych zbiorów domkniętych jest rodziną scentrowaną.

Definicja 5. *Pokryciem (otwartym)* nazywamy rodzinę zbiorów otwartych $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ taką, że $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$.

Definicja 6. (X,d) jest *toplogicznie zwarta* jeśli każde pokrycie zawiera pokrycie (czyli tzw. podpokrycie) skończone.

Definicja 7. (X,d) jest *przeliczalnie zwarta* jeśli każde pokrycie przeliczalne zawiera podpokrycie skończone.

Definicja 8. (X,d) jest *uniwersalnie zupełna* jeśli każda przestrzeń homeomorficzna z (X,d) jest zupełna.

Definicja 9. (X,d) ma *własność Lindelöfa* jeśli każde pokrycie zawiera podpokrycie przeliczalne.

TWIERDZENIA

Twierdzenie 0. *Ciągły obraz zbioru ciągowo zwartego jest ciągowo zwarty.*

Twierdzenie 1. *Metryczna i ciągowa zwartość są równoważne.*

Twierdzenie 2. *Przestrzeń metrycznie zwarta jest ograniczona, ośrodkowa, uniwersalnie zupełna.*

Twierdzenie 3. *Przestrzeń metryczna (X,d) uniwersalnie zupełna jest metrycznie zwarta.*

Twierdzenie 4. *Przestrzeń jest topologicznie zwarta wtedy i tylko wtedy gdy każda rodzina scentrowana ma przekrój niepusty.*

Twierdzenie 5. *Przestrzeń metryczna, w której każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych ma przekrój niepusty (w szczególności jest tak gdy każda rodzina scentrownana ma przekrój niepusty), jest metrycznie zwarta.*

Twierdzenie 6. *Każda przestrzeń metryczna jest ośrodkowa wtedy i tylko wtedy gdy ma własność Lindelöfa.*

Twierdzenie 7. *Przestrzeń metrycznie zwarta jest przeliczalnie zwarta.*

WNIOSEK, Twierdzenie 8. *Dla przestrzeni metrycznej* (X, d) *NWSR*
1) metryczna zwartość,
2) ciągowa zwartość,
3) uniwersalna zupełność.
4) topologiczna zwartość,
5) warunek, że każda rodzina scentrowana ma przekrój niepusty,
6) warunek, że każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów domkniętych ma przekrój niepusty,
7) przeliczalna zwartość,

DOWODY:

Dowód Tw 0. Niech $f : X \to Y$ będzie ciągła, a X zwarta. Weźmy dowolny ciąg (y_n) w obrazie $f(X)$. Mamy $y_n = f(x_n)$ dla odpowiednio dobranych punktów $x_n \in X$. Jeśli teraz (x_{n_k}) jest podciągiem zbieżnym do pewnego $x \in X$ (a istnieje taki ze zwartości ciągowej X), to $(f(x_{n_k}))$ jest ciągiem zbieżnym do $f(x)$ (z ciągłości funkcji f). Ale to jest ciąg (y_{n_k}), czyli podciąg ciągu (y_n) i zbiega do elementu zbioru $f(X)$. Czyli $f(X)$ jest ciągowo zwarta. $\square$

Dowód Tw 1. Niech (X, d) będzie ciągowo zwarta i niech (x_n) będzie ciągiem podstawowym. Ponieważ (z ciągowej zwarości) ma on podciąg zbieżny, sam jest zbieżny (do tej samej granicy – to jest własność ciągów podstawowych). Zatem (X, d) jest zupełna. Załóżmy, że X nie jest całkowicie ograniczona. Wtedy istnieje $\epsilon > 0$ taki, że żaden skończony układ kul o promieniu ϵ nie pokrywa X. Wtedy biorąc indukcyjnie za x_{n+1} punkt spoza sumy kul wokół punktów $x_1, x_2, \ldots, x_n$ konstruujemy ciąg punktów, w ktorym każde dwa elementy są w odległości co najmniej ϵ. Taki ciąg nie ma podciągu podstawowego, co przeczy ciągowej zwartości. Zatem wykazaliśmy, że X jest całkowicie ograniczona.
Teraz na odwrót. Niech X będzie całkowicie ograniczona i zupełna i weźmy dowolny ciąg (x_n). Ustalamy ciąg ϵ_n malejący do zera. Jedna ze skończenie wielu kul o promieniu ϵ_1 pokrywajcych X zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu (x_n), a wiec podciąg (x_{n_k}). Pierwszy wyraz tego ciągu będzie pierwszym wyrazem y_1 przyszłego podciągu zbieżnego ciągu (x_n). Dalej, jedna ze skończenie wielu kul o promieniu ϵ_2 zawiera nieskończenie wiele wyrazów ciągu (x_{n_k}), a wiec podciąg $(x_{n_{k_i}})$. Drugi wyraz tego ciągu będzie naszym y_2 (dlatego drugi, że pierwszy może mieć ten sam indeks w ciągu (x_n) co y_1, natomiast drugi z pewnością będzie mieć indeks wyższy). I tak dalej, skonstruujemy ciąg y_n będący podciągiem ciągu (x_n) o tej własności, że wyrazy od n-tego wzwyż są w jednej kuli o promieniu ϵ_n. Taki ciąg jest oczywiście podstawowy, a z zupełności – zbieżny. $\square$

Dowód Tw 2. Ograniczoność wynika z tego, że skończenie wiele kul o promieniu ϵ, powiedzmy $K(x_1, \epsilon), \ldots, K(x_n, \epsilon)$ zawierają się w kuli o promieniu $\epsilon + M$ wokół punktu x_1, gdzie $M = \max\{d(x_1, x_i),\ i = 2, \ldots, n\}$. Ośrodkowość: ośrodkiem jest zbiór środków kul pokrywających o promieniach ϵ_n , gdzie (ϵ_n) jest pewnym ciągiem zbieżnym do zera. Uniwersalna zupełność wynika z Twierdzeń 0 i 1. $\square$

Dowód Tw 3. Najpierw definicje pomocnicze: funkcja $f : X \times X \to [0, \infty)$ nazywa się funkcją kosztów przejazdu jeśli $f(x, y) = f(y, x)$ i $f(x, x) = 0$. Mając funkcję kosztów przejazdu f definiujemy ,,metrykę najtańszego połączenia” wzorem

$$d_f(x, y) = \inf\{f(x_0, x_1) + f(x_1, x_2) + \cdots + f(x_{n-1}, x_n)\}$$

po wszystkich skończonych układach punktów $x_0, x_1, \ldots, x_n$ takich, że $x_0 = x$ i $x_n = y$. Łatwo sprawdza się, że jest to pesudometryka (spełnia wszystkie aksjomaty

metryki oprócz tego, że $d_f(x,y) = 0 \implies x = y$). Oczywiście $d_f(x,y) \leq f(x,y)$ ($f(x,y)$ reprezentuje ,,połączenie bezpośrednie").
W sytuacji Tw. 3 weźmy przestrzeń niezwartą i w niej ciąg (x_n) nie mający podciągu zbieżnego. Wybierając podciąg można uzyskać ciąg (x_n) różnowartościowy (czyli o wyrazach parami różnych). Zadajemy funkcję kosztu

$$f(x,y) = \begin{cases} d(x,y), \text{ gdy przynajmniej jeden z punktów } x, y \text{ nie należy do ciągu } (x_n) \\ \min\{d(x,y), |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|\}, \text{ gdy } x = x_n, y = y_m. \end{cases}$$

(Interpretacja: punkty x_n to ,,lotniska", ceny przelotów z lotniska x_n do lotniska x_m są takie jak odległości w ciągu $\frac{1}{n}$. Z punku x do y możemy jechać ,,po lądzie", albo korzystać z połączeń lotniczych, ale wtedy trzeba dojechać lądem do jakiegoś lotniska). Widać, że $f(x,y) \leq d(x,y)$, zatem $d_f(x,y) \leq d(x,y)$, z czego wynika natychmiast, że zbieżność w d implikuje zbieżność w d_f. Pokażemy, że jest też na odwrót. W tym celu wprowadzamy oznaczenie

$$r(x) = \begin{cases} \min\{d(x,x_n) : \ n \geq 1\} \text{ gdy } x \text{ nie jest wyrazem ciagu } (x_n) \\ \min\{\frac{1}{n+1}, d(x_n, x_m) : \ m \neq n\} \text{ gdy } x = x_n. \end{cases}$$

Jest istotne, że dla każdego x, $r(x) > 0$. (Liczba ta interpretuje się jako odległość (w nowej metryce) do najbliższego (innego niż x) lotniska). Nietrudno zauważyć, że dla każdego x i y mamy $d_f(x,y) \geq \min\{d(x,y), r(x)\}$ (najtańsze połączenie, jeśli nie jest ,,po lądzie", to albo zawiera dojazd do najbliższego lotniska, albo, jeśli już jesteśmy na lotnisku – najtańszy przelot do innego lotniska). Zatem jeśli $d_f(x,y) < r(x)$ to $d_f(x,y) = d(x,y)$. Z tego natychmiast wynika, że jeśli $y_n \to x$ w d_f to $y_n \to x$ również w d. Zatem metryki d i d_f są równoważne i (X,d) oraz (X, d_f) są homeomorficzne poprzez identyczność.
Ostatnia rzecz, to spostrzeżenie, że ciąg (x_n) jest podstawowy w metryce d_f (dla $n \geq m$, $d_f(x_n, x_m) \leq \frac{1}{n}$) ale nie jest zbieżny (bo nie był zbieżny w równoważnej metryce d). Zatem (X, d_f) nie jest zupełna. $\square$

Dowód Tw 4. Niech $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \ \alpha \in A\}$ będzie rodziną zbiorów domkniętych o pustym przekroju. Wtedy $U_\alpha = F_\alpha^c$ jest pokryciem. Z założenia o topologicznej zwartości istnieje podpokrycie skończone $\{U_{\alpha_i} : \ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Wtedy przekrój skończony $\bigcap_{i=1}^n F_{\alpha_i}$ jest pusty, czyli rodzina $\mathcal{F}$ nie jest scentrowana. A zatem rodziny scentrowane mają przekrój niepusty.
Na odwrót. Niech $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \ \alpha \in A\}$ będzie pokryciem nie posiadającym podpokrycia skończonego. Wtedy $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \ \alpha \in A\}$, gdzie $F_\alpha = U_\alpha^c$, jest rodziną scentrowaną o przekroju pustym. $\square$

Dowód Tw 5. Niech X posiada własność, że każdy zstępujący ciąg niepustych zbiorów ma przekrój niepusty. Pokażemy ciągową zwartość. Przypuśćmy, że (x_n) jest ciągiem bez podciągów zbieżnych. Znowu możemy założyć, że jest to ciąg różnowartościowy. Wtedy zbiory $F_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ są niepuste, zstępujące, domknięte (gdyby w domknięciu dochodził jakiś punkt, to byłby on granicą podciągu) i mają przekrój pusty. Sprzeczność. $\square$

Dowód Tw 6. Jeśli (X,d) jest metryczna i ośrodkowa, o ośrodku $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, to rodzina kul $\mathcal{K} = \{K(x_n, \frac{1}{k}) : \ n, k \in \mathbb{N}\}$ jest przeliczalna. Nietrudno pokazać (z gęstości ośrodka i elementarnych nierówności trójkąta), że jeśli U jest zbiorem otwartym i $x \in U$ to istnieje $K \in \mathcal{K}$ taka, że $x \in K \subset U$. Jeśli $\mathcal{U}$ jest pokryciem, to najpierw dla każdego $x \in X$ wybieramy jakiś $U_x \in \mathcal{U}$ taki, że $x \in U_x$, a następnie wybieramy kulę $K_x \in \mathcal{K}$ taką, że $x \in K_x \subset U_x$. Rodzina kul $\mathcal{K}_0 = \{K_x : x \in X\}$ jest co prawda indeksowana zbiorem być może nieprzeliczalnym ($x \in X$), ale de

facto jest to podrodzina rodziny $\mathcal{K}$, a wiec jako zbiór jest przeliczalna (wyrazy K_x dla różnych x mogą się powtarzać). Wystraczy teraz dla każdej kuli $K \in \mathcal{K}_0$ wybrać jedną jej postać jako $K_{x(K)}$, wtedy wybrane indexy $x(K)$ stanowią zbiór przeliczalny i rodzina $\{U_{x_K} : K \in \mathcal{K}_0\}$ jest podpokryciem przeliczalnym (bo dla dowolnego $x \in X$ mamy $x \in K_x = K_{x(K)} \subset U_{x(K)}$). Czyli mamy własność Lindelöfa.
Na odwrót: jeśli (X,d) ma własność Lindelöfa, to dla każdego $n \in \mathbb{N}$ bierzemy pokrycie wszystkimi kulami o promieniu $\frac{1}{n}$, z niego wybieramy podpokrycie przeliczalne $\{K_{n,i}) : i \in \mathbb{N}\}$. Zbiór wszystkich środków tak wybranych kul (oznaczmy go przez $\{x_{n,i} : n \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{N}\}$) jest, jak łatwo widać, przeliczlnym zbiorem gęstym, czyli ośrodkiem. $\square$

Dowód Tw 7. Weźmy pokrycie przeliczalne $\mathcal{U} = \{U_n : \ n \in \mathbb{N}\}$, które nie ma podpokrycia skończonego. Gdyby dla pewnego n_0 wszystkie „urozłącznienia"

$$V_n = U_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} U_i$$

z $n \geq n_0$ były puste oznaczałoby to, że suma do $n_0 - 1$ jest całym X, czyli że $\{U_1, \ldots, U_{n_0-1}\}$ jest pokryciem skończonym, a założyliśmy, że takiego nie ma. Zatem istnieje ciąg nieskończony indeksów n_k takich, że $V_{n_k} \neq \emptyset$. Wybierzmy po jednym punkcie $x_k \in V_{n_k}$. Z ciagowej zbieżności można (wybierając jeszcze raz podciąg) założyć, że x_k zbiega do jakiegoś $x \in X$. Istnieje n_0 takie, że $x \in U_{n_0}$ (bo zbiory U_n pokrywają X). Wtedy $x_k \in U_{n_0}$ dla dużych k. Ale dla dostatecznie dużego k, $n_k > n_0$ i wtedy V_{n_k} jest rozłączne z U_{n_0} (z def. V_n). Sprzeczność, bo $x_k \in V_{n_k}$ i jednocześnie $x_k \in V_{n_0}$. $\square$

Dowód Tw 8. Wynika to wprost z poprzednich twierdzeń. $\square$

Własności funkcji ciągłych. *Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją ciągłą, gdzie (X,d) jest zwarta, a (Y,e) dowolna metryczna. Wtedy*
1) $f(X)$ jest zwarty (to już wiemy);
2) f jest jednostajnie ciągła;
3) Jeśli f jest różnowartościowa to $f : X \to f(X)$ jest homeomorfizmem.
4) Jeśli f_n i f są ciągłymi funkcjami rzeczywistymi (czyli teraz zakładamy, że $(Y,e) = (\mathbb{R}, |\cdot - \cdot|)$) i f_n zbiegają monotonicznie do f w każdym punkcie $x \in X$, to zbieżność ta jest jednostajna.

Dowody.
2) Ustalmy $\epsilon > 0$. Dla każdego $x \in X$ istnieje $\delta = \delta(x, \frac{\epsilon}{2}) > 0$ taka, że

$$d(x,y) < \delta \implies e(f(x), f(y)) < \tfrac{\epsilon}{2}.$$

Jeśli teraz $d(x,z) < \frac{\delta}{2}$ to

$$d(z,y) < \tfrac{\delta}{2} \implies e(f(z), f(y)) < \epsilon.$$

Innymi słowy $\delta(z,\epsilon) \geq \frac{\delta(x,\frac{\epsilon}{2})}{2}$ dla z w pewnej kuli $K_x = K(x, \frac{\delta(x,\frac{\epsilon}{2})}{2})$. Te kule pokrywają X, zatem ze zwartości istnieje pokrycie skończone $\{K_{x_i} : \ i = 1, 2 \ldots, n\}$. Niech

$$\delta(\epsilon) = \min\{\tfrac{\delta(x_i,\frac{\epsilon}{2})}{2} : \ i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Twierdzimy, że $d(z,y) < \delta(\epsilon) \implies e(f(z), f(y)) < \epsilon$ niezależnie od wyboru z i y. Faktycznie, istnieje x_i taki, że $z \in K_{x_i}$. Wtedy

$$\delta(z,\epsilon) \geq \tfrac{\delta(x_i,\frac{\epsilon}{2})}{2} \geq \delta(\epsilon).$$

Zatem $d(z,y) < \delta(\epsilon)$ implikuje $d(z,y) \leq \delta(z,\epsilon)$ a to rzeczywiście implikuje żądaną nierówność $e(f(z), f(y)) < \epsilon$. $\square$

3) Trzeba pokazać, że odwzorowanie odwrotne f^{-1} jest ciągłe na $f(X)$. Niech $y_n \to y$ w $f(X)$. Istnieją (jedyne) punkty x_n i x takie, że $y_n = f(x_n)$ i $y = f(x)$. Musimy pokazać, że $x_n \to x$. Weźmy dowolny podciąg x_{n_k}. Ma on pod-podciąg $x_{n_{k_i}}$ zbieżny do jakiegoś x'. Z ciągłości f, ciąg $f(x_{n_{k_i}}) = y_{n_{k_i}}$ zbiega do $f(x')$. Ale jako podciąg ciągu (y_n) zbiega on również do y. Stąd $y = f(x')$ Z różnowartościowości funkcji f mamy $x = x'$. Pokazaliśmy, że z każdego podciągu ciągu (x_n) można wybrać pod-podciąg zbieżny do x. To oznacza zbieżność całego ciągu (x_n) do x. $\square$

4) Ustalmy $\epsilon > 0$. Niech $F_n = \{x : \ |f(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\}$. Oczywiście jest to zbiór domknięty. Ponieważ f_n zbiegają monotonicznie do f, zbiory te maleją (czyli tworzą ciąg zstępujący). Ponieważ zbieżność funkcji zachodzi w każdym punkcie x, przekrój wszystkich zbiorów F_n jest pusty. Zatem, ze zwartości, nie mogą wszystkie zbiory F_n być niepuste. A to oznacza, że od pewnego n_0 funkcje f_n są od funkcji f oddalone mniej niż ϵ w metryce supremum. Czyli jest zbieżność jednostajna. $\square$

Tomasz Downarowicz