T O P O L O G I A

WPPT I, sem. letni

WYKŁAD 9

Zbiór Cantora

Wrocław, 28 maja 2007

Konstrukcja zbioru Cantora

Przedział [0,1] nazwiemy *odcinkiem rzędu 0.* Przedziały $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ i $I_1 = [\frac{2}{3}, 1]$ nazywamy *odcinkami rzędu 1.* Przypuśćmy, że zdefiniowaliśmy 2^n odcinków n-tego rzędu $\{I_a : a \in \{0,1\}^n\}$ (czyli $I_{0...00}$, $I_{0...01}$, $I_{0...10}$, $I_{0...11}$, $\ldots$, $I_{1...11}$). Wtedy *odcinki rzędu* $n+1$ są indeksowane ciągami postaci $a0$ i $a1$ ($\in \{0,1\}^{n+1}$) i definijemy je następująco:

jeśli $I_a = [x, y]$, to $I_{a0} = [x, \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y]$, $I_{a1} = [\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y, y]$ (patrz rysunek).

I_a [..]

I_{a0} [..................]   [..................] I_{a1}

Kolejny rysunek przedstawia wszystkie odcinki rzędów 0,1,2 i 3.

$[0, 1]$ [..]

I_0 [..................]   [..................] I_1

I_{00} [.....]   [.....] I_{01} I_{10} [.....]   [.....] I_{11}

I_{000} [.] [.]   [.] [.]   [.] [.]   [.] [.] I_{111}

Zauważmy, że wszystkie odcinki rzędu n mają długość $\frac{1}{3^n}$. Oznaczmy przez C_n sumę wszystkich odcinków rzędu n:

$$C_n = \bigcup_{a \in \{0,1\}^n} I_a.$$

Jako suma skończenie wielu (2^n) przedziałów domkniętych (rozłącznych) jest to zbiór domknięty. Oznaczmy przez K_n zbiór wszystkich 2^{n+1} końców wszystkich odcinków rzędu n. Zauważmy, że każdy punkt $x \in K_n$ jest ułamkiem o mianowniku 3^n. Zauważmy też, że mamy zawierania

$$K_n \subset K_{n+1} \subset C_{n+1} \subset C_n.$$

Taraz możemy zdefiniować *zbiór Cantora* jako

$$\mathfrak{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n.$$

Z poprzednich inkluzji wynika, że $\mathfrak{C} \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, zatem $\mathfrak{C}$ jest niepusty i domknięty (jako przekrój zbiorów domkniętych). Jako domknięty podzbiór zwartego przedziału $[0, 1]$ jest to zbiór zwarty.

Dalsze własności zbioru Cantora

1) Zbiór Cantora jest domknięciem zbioru końców odcinków wszytskich rzędów:

$$\mathfrak{C} = \overline{\bigcup_n K_n}.$$

Dowód: Jest jasne, że $\mathfrak{K} := \bigcup_n K_n \subset \mathfrak{C}$, zatem $\overline{\mathfrak{K}} \subset \mathfrak{C}$. Na odwrót: jeśli $x \in \mathfrak{C}$, to dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje n takie, że $\frac{1}{3^n} < \epsilon$. Ponieważ x należy do pewnego odcinka rzędu n to oba końce tego odcinka leżą w odległości mniejszej niż ϵ od x. Stąd x należy do domknięcia zbioru końców. $\square$

2) Zbiór Cantora jest homeomorficzny ze zbiorem $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ z topologią produktową, w szczególności jest on nieprzeliczalny.
Dowód: Każdy punkt x należy do jedynego odcinka I_a rzędu n. Odpowiedni (jedyny) taki indeks $a \in \{0,1\}^n$ oznaczmy przez $a_n(x)$. zauważmy, że ciąg $a_{n+1}(x)$ jest przedłużeniem ciągu $a_n(x)$ w prawo o zero lub jedynkę. Zatem istnieje jedyny nieskończony ciąg $a_\infty(x) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, który dla każdego n zgadza się na początkowych n pozycjach z $a_n(x)$. Zbudowaliśmy odwzorowanie $\pi : \mathfrak{C} \to \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Pokażemy teraz, że jest ono ciągłą bijekcją, a wiemy już, że ciągła bijekcja określona na zbiorze zwartym jest homeomorfizmem. Ustalmy $x \in \mathfrak{C}$ i $n \in \mathbb{N}$. Jeśli $y \in \mathfrak{C}$ leży w odległości mniejszej niż $\frac{1}{3^n}$ od x, to y należy do tego samego odcinka rzędu n co x, a stąd odpowiadający mu ciąg $a_\infty(y)$ zgadza się z $a_\infty(x)$ na n początkowych pozycjach. Wykazaliśmy ciągłość odwzorowania π względem toplogii produktowej. Jeśli $a \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ i $a_n \in \{0,1\}^n$ oznacza ciąg a obcięty do pierwszych n współrzędnych, to zbiory I_{a_n} stanowią ciąg zstępujący niepustych podzbiorów domkniętych (a więc rodzinę scentrowaną) odcinka $[0,1]$. Zatem ze zwartości tego odcinka przekrój $\bigcap_n I_{a_n}$ jest niepusty. Teraz jest oczywiste, że jeśli x należy do tego przekroju to $a_n(x) = a_n$ a zatem $a_\infty(x) = a$. Wykazaliśmy, że π jest „na". Wreszcie niech $x \neq y$ będą elementami $\mathfrak{C}$. Niech n będzie takie, że $\frac{1}{3^n} < |x-y|$. Wtedy x i y należą do różnych odcinków rzędu n, zatem $a_n(x) \neq a_n(y)$, a co za tym idzie $a_\infty(x) \neq a_\infty(y)$. To daje różnowartościowość odwzorowania π. $\square$

3) Dla każdej niepustej przestrzeni metrycznej zwartej X istnieje ciągła surjekcja $\pi : \mathfrak{C} \to X$.
Dowód: Istnieje pokrycie przestrzeni X skończenie wieloma (niekoniecznie różnymi) niepustymi zbiorami domkniętymi o średnicy mniejszej niż ϵ_1. Powtarzając np. ostatni z nich możemy założyć, że ich ilość jest potęgą dwójki 2^{n_1}: $A_1, A_2, \ldots, A_{2^{n_1}}$ albo $\{A_a : a \in \{0,1\}^{n_1}\}$. Podobnie, każdy ze zbiorów A_a można pokryć skończenie wieloma niepustymi zbiorami domkniętymi o średnicy mniejszej niż ϵ_2 i zawartymi w A_a. Można założyć, że dla każdego a zbiorów tych jest tyle samo, i że ich ilość jest potęgą dwójki 2^{n_2}. Zbiory pokrywające A_a oznaczamy przez A_{ab}, gdzie $b \in \{0,1\}^{n_2}$. Zauważmy, że indeks ab reprezentuje ciąg należący do $\{0,1\}^{n_1+n_2}$. Postępując indukcyjnie otrzymamy dla każdego k pokrycie całej przestrzeni zbiorami domkniętymi A_a o średnicach nie przekraczających ϵ_k, gdzie $a \in \{0,1\}^{n_1+n_2+\cdots+n_k}$. Ponadto jeśli $j < k$ i $a' \in \{0,1\}^{n_1+n_2+\cdots+n_j}$ jest obcięciem a do pierwszych $n_1+n_2+\cdots+n_j$ współrzędnych, to $A_a \subset A_{a'}$. Rozważmy teraz dowolnie wybrany ciąg nieskończony $v \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} = \mathfrak{C}$. Określamy v_k jako obcięcie v do pierwszych $n_1+n_2+\cdots+n_k$ współrzędnych. Następnie zauważmy, że

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_{v_k}$$

jest zstępującym przekrojem niepustych zbiorów domkniętych, a więc ze zwartości X jest zbiorem niepustym i o średnicy zero, zatem jednopunktowym. Jedyny punkt tego zbioru oznaczmy przez x_v. Określiliśmy odwzorowanie $\pi : \mathfrak{C} \to X$, $v \mapsto x_v$. Pokażemy teraz, że jest to odwzorowanie ciągłe. Ustalmy $\epsilon > 0$ i k takie, że $\epsilon_k < \epsilon$. Jeśli dwa ciągi v i v' są na tyle blisko w $\mathfrak{C}$, że zgadzają się na pierwszych $n_1+n_2+\cdots+n_k$ współrzędnych, $v_k = v'_k$, to x_v i $x_{v'}$ należą do tego samego zbioru A_{v_k}, zatem odległość między nimi nie przekracza ϵ_k. Aby wykazać, że π jest surjekcją, wystarczy zauważyć, że każdy ustalony punkt x należy do pewnego zbioru $A_{a(x)}$, gdzie $a(x) \in \{0,1\}^{n_1}$. Dalej, przy pokrywaniu zbioru $A_{a(x)}$ zbiorami $A_{a(x)b}$, x należy do co najmniej jednego z nich, który oznaczymy $A_{a(x)b(x)}$. Rozumując indukcyjnie otrzymamy ciąg nieskończony $v = a(x)b(x)c(x)\ldots$ taki, że $x \in A_{v_k}$ dla każdego k. Wtedy, zgodnie z definicją, $x = x_v$ czyli $x = \pi(v)$. $\square$

„Schody Cantora"

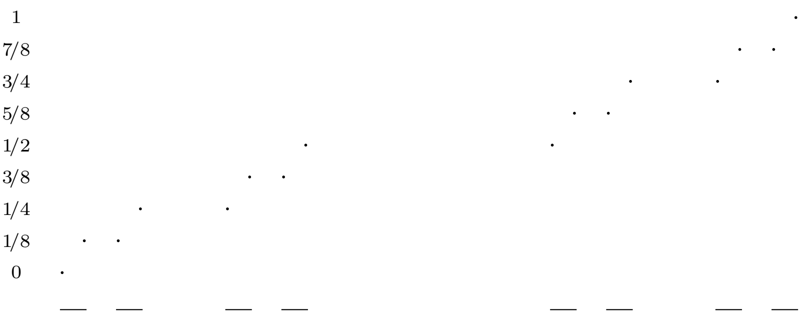
Przedstawimy teraz konstrukcję konkretnej surjekcji $f : \mathfrak{C} \to [0,1]$, która jest funkcją niemalejącą i jej obcięcie do zbioru $\mathfrak{C} \setminus \mathfrak{K}$ jest różnowartościowe. Najpierw określimy f właśnie na zbiorze $\mathfrak{K}$. Kładziemy

$$f(0) = 0 \quad \text{i} \quad f(1) = 1.$$

Indukcyjnie: niech $[x,y]$ będzie odcinkiem rzędu n i przypuśćmy, że określiliśmy wartości funkcji f na końcach tego odcinka: $f(x)$ i $f(y)$ gdzie $f(x) < f(y)$. W odcinku tym zawarte są dwa odcinki rzędu $n+1$ o końcach x i $x' = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x$ oraz $y' = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}x$ i y. Ponieważ w x i y funkcja f jest już określona, trzeba tylko zdefiniować $f(x')$ i $f(y')$. Kładziemy

$$f(x') = f(y') = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Oczywiście na czterech punktach x, x', y', y funkcja f jest niemalejąca. W ten sposób określiliśmy f na całym zbiorze końców $\mathfrak{K}$. Nietrudno zauważyć, że na zbiorze K_n końców odcinków rzędu n f jest niemalejąca i przyjmuje wartości wymierne o mianowniku 2^n i wartości na końcach tego samego odcinka rzędu n różnią się dokładnie o $\frac{1}{2^n}$. Na rysunku pokazano wartości f na zbiorze K_3.



Teraz określamy f w pozostałych punktach $x \in \mathfrak{C}$ wzorem

$$f(x) = \sup\{f(y) : y \in \mathfrak{K} \cap [0,x]\}.$$

Jeśli $x \in \mathfrak{K}$, to z monotoniczności f na $\mathfrak{K}$ powyższe supremum jest osiągane w x, więc powyższa definicja powtarza wcześniej zdefiniowaną wartość $f(x)$. Jeśli $x < y$, to supremum w definicji $f(x)$ jest po zbiorze mniejszym niż dla $f(y)$, zatem $f(x) \leq f(y)$. Czyli f jest niemaląca na całym $\mathfrak{C}$. Aby wykazać ciągłość rozważmy x, y położone w odległości mniejszej niż $\frac{1}{3^n}$. Wtedy x i y należą do tego samego odcinka rzędu n. Z monotoniczności f, wartości $f(x)$ i $f(y)$ różnią się nie bardziej niż wartości przymowane przez f na końcach tego odcinka, a wiemy, że ta różnica wynosi $\frac{1}{2^n}$. Dowiedliśmy jednostajnej ciągłości f. To, że f jest surjekcją wynika z dwóch faktów: (1) f przyjmuje jako wartości wszystkie liczby wymierne z przedziału $[0,1]$ o mianowanikach będących potęgami dwójki. Oczywiście te liczby leżą gęsto w

$[0,1]$. (2) Ciągły obraz zbioru Cantora musi być zwarty, a więc domknięty. Ostatnia rzecz do wykazania, to różnowartościowość f na zbiorze $\mathfrak{C}\setminus\mathfrak{K}$. Nietrudno uzasadnić, że między dowolnymi dwoma różnymi punktami $a < b$ tego zbioru zawarty jest w całości pewien odcinek $[x, y]$ pewnego rzędu n. Wiemy już, że $f(x) < f(y)$ (różnica wynosi $\frac{1}{2^n}$). Z monotoniczności f dostajemy $f(a) \leq f(x) < f(y) \leq f(b)$ czyli $f(a) < f(b)$. $\square$

Tomasz Downarowicz