Analiza Matematyczna 2.2A (MAT1667) dla W9
Opracowanie: dr Marian Gewert, dr Zbigniew Skoczylas

Lista zdań obejmuje cały materiał kursu i jest podzielona na 14 jednostek – ćwiczeń o numerach od 1 do 14. Piętnaste ćwiczenia przeznaczono na kolokwium. Na zajęciach należy rozwiązać jeden lub dwa podpunkty z każdego zadania. Pozostałe podpunkty przeznaczone są do samodzielnej pracy studentów. Trudniejsze zadania oznaczone są gwiazdką.

Uzdolnionych studentów zachęcamy do przygotowania się w czasie semestru i następnie udziału w egzaminie na ocenę celującą z analizy matematycznej 2. Zadania z egzaminów z ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej http://wmat.pwr.edu.pl/studenci/kursy-ogolnouczelniane/egzaminy-na-ocene-celujaca oraz w książce [4].

Ćwiczenia 1

1. Korzystając z definicji zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int\limits_2^\infty \frac{dx}{x^2-x}$; (b) $\displaystyle\int\limits_4^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+1}$; (c) $\displaystyle\int\limits_{2\pi}^\infty x\cos x\,dx$;

(d) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{\sqrt{e^{-x}+1}}$; (e) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+6x+25}$; (f) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty xe^{2x}\,dx$.

2. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}$; (b) $\displaystyle\int\limits_4^\infty \frac{dx}{\left(\sqrt{x}+3\right)^2}$; (c) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{x(x+1)\,dx}{x^4+x+1}$;

(d) $\displaystyle\int\limits_0^\infty \frac{\left(2^x+1\right)\,dx}{3^x+1}$; (e) $\displaystyle\int\limits_\pi^\infty \frac{(x+\sin x)\,dx}{x^3}$; (f) $\displaystyle\int\limits_4^\infty \frac{(3+\cos x)\,dx}{\sqrt{x}+2}$.

3. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

(a) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{\left(\sqrt{x}+1\right)\,dx}{x\,(x+1)}$; (b) $\displaystyle\int\limits_5^\infty \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^5-3}}$; (c) $\displaystyle\int\limits_2^\infty \left(e^{1/x}-1\right)\,dx$;

(d) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \sin^2\frac{1}{x}\,dx$; (e) $\displaystyle\int\limits_1^\infty \frac{x^2\,dx}{x^3-\sin x}$.

4. (a) Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywą $y=\dfrac{1}{x^2+9}$ oraz osią Ox.

(b) Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi Ox obszaru $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x\geqslant 0,\ 0\leqslant y\leqslant e^{-x}\right\}$.

(c) Uzasadnić, że pole powierzchni powstałej z obrotu wykresu funkcji $y=\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ $(x\geqslant 1)$ wokół osi Ox ma skończoną wartość.

*** 5.** Wyznaczyć wartości główne całek niewłaściwych:

(a) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{x^3\cos x\,dx}{x^2+4}$; (b) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{e^x\,dx}{e^x+1}$; (c) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^\infty e^{-|x+5|}\,dx$.

Ćwiczenia 2

6. Znaleźć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$; (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

7. Korzystając z kryterium całkowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9}$; (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n^2+n}$; (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$; (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{e^n}{e^{2n}+1}$.

8. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+2}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+2}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$; (d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+e^n}{e^n+4^n}$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n}{n3^n+2^n}$.

9. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{\sqrt{2n^6-1}}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4+1}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-1}{3^n-1}$;

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}4^n\ln\left(1+3^{-n}\right)$; (e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\pi/n^2\right)}{\sin\left(\pi/n\right)}$; (f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n!+1}{(n+2)!}$.

10. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2016^n}{(2n)!}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{n^4+1}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\pi^n n!}$; (e*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

11. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^{2n}}{(3n^2+1)^n}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n+5^n}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n+1}\right)^n$.

Ćwiczenia 3

12. Wykazać zbieżność odpowiedniego szeregu i następnie na podstawie warunku koniecznego zbieżności szeregów uzasadnić podane równości:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^{2016}}{3^n}=0$; (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$; (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=\infty$; (d*) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(3n)!(4n)!}{(5n)!(2n)!}=0$.

13. Korzystając z twierdzenia Leibniza uzasadnić zbieżność szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^n+4^n}$; (c) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\sin\frac{(-1)^n}{n}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$.

14. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n+1}$; (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+2}$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2n}{3n+5}\right)^n$; (d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$.

15. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{ne^n}$; (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(4x-12)^n$; (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n!}$; (d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2x+6)^n}{3^n-2^n}$; (e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+1)^{2n}}{2^n+3}$.

Ćwiczenia 4

16. Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i określić przedziały ich zbieżności:

(a) $\dfrac{5}{1-2x}$; (b) $\sin\dfrac{x}{2}$; (c) x^2e^{-x}; (d) $\dfrac{x^3}{16+x^2}$; (e) $\cosh x$; (f) $\sin^2 x$.

17. Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych obliczyć:

(a) $f^{(50)}(0),\ \ f(x)=x^2\cos x$; (b) $f^{(20)}(0),\ \ f(x)=xe^{-x}$;

(c) $f^{(11)}(0),\ \ f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$; (d) $f^{(10)}(0),\ \ f(x)=x\sin^2\dfrac{x}{2}$.

18. Korzystając z twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych wyznaczyć szeregi Maclaurina funkcji:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$; (b) $f(x)=xe^{-x^2}$; (c) $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)$; (d) $f(x)=\operatorname{arc\,tg} x$.

19. Wykorzystując twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów potęgowych pokazać, że dla każdego $x\in(-1,1)$ prawdziwe są równości:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} nx^n=\frac{x}{(1-x)^2}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n=\frac{2x}{(1-x)^3}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x)$.

20. Obliczyć sumy szeregów liczbowych:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$; (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{5^n}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)4^n}$.

Wskazówka. Wykorzystać równości z poprzedniego zadania.

Ćwiczenia 5

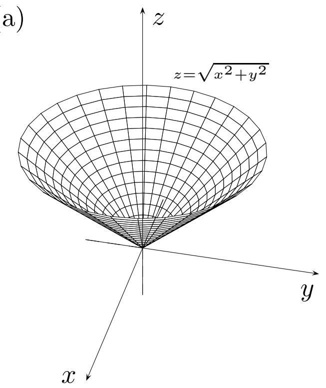
21. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x,y)=\ln(y-\sin x)$; (b) $f(x,y)=\sqrt{\dfrac{y-2}{x+1}}$; (c) $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2-y}}$; (d) $f(x,y)=\ln\dfrac{x^2+y^2-9}{16-x^2-y^2}$;

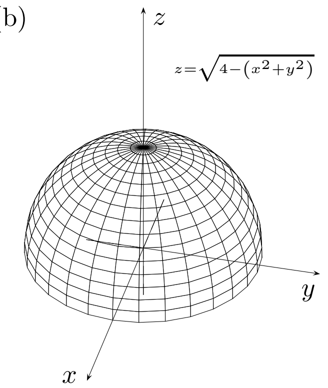
(e) $g(x,y,z)=\sqrt{x}+\sqrt{2-z}$; (f) $g(x,y,z)=\arccos\left(x^2+y^2+z^2-9\right)$.

22. Wykresy (rys. (a)–(c)) połączyć z odpowiadającymi im poziomicami (rys. (A)–(C)) wykonanymi dla $h=2,\ 3/2,\ 1,\ 1/2,\ 0$:

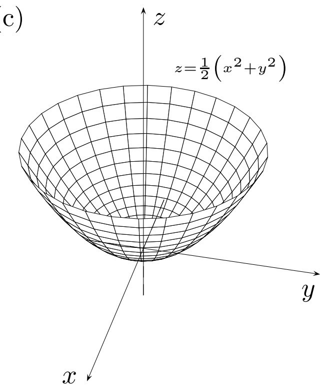
(a)



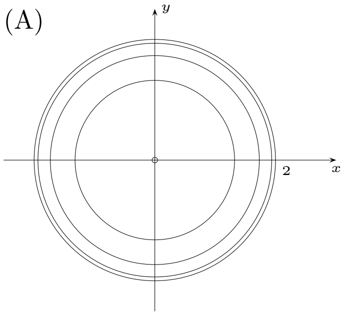
(b)



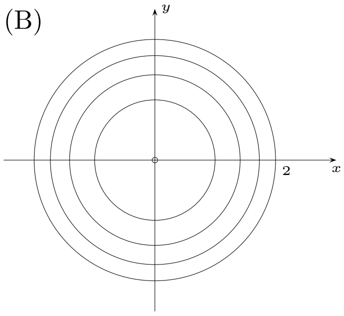
(c)



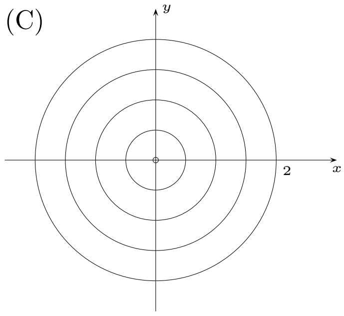
(A)



(B)



(C)



23. Naszkicować wykresy funkcji:

(a) $f(x,y) = 1 - 2\sqrt{x^2+y^2}$; (b) $f(x,y) = \sqrt{3+2x-x^2-y^2}$; (c) $f(x,y) = x^2+2x+y^2-6y+3$;

(d) $f(x,y) = \cos x$; (e) $f(x,y) = 1 - y^2$; (f*) $f(x,y) = \sqrt{y^2-x^2}$.

*** 24.** Obliczyć granice:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^4-y^4\right)}{x^2+y^2}$; (b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$; (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2 \cos\dfrac{1}{x^4+y^4}$.

Ćwiczenia 6

25. Korzystając z definicji obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu f_x, f_y funkcji f we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2}{y}$, $(0,1)$; (b) $f(x,y) = \sqrt{x^6+y^4}$, $(0,0)$.

26. Obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f i g:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y^3}{xy^2}$; (b) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1-xy}{x+y}$; (c) $f(x,y) = e^{\cos\frac{x}{y}}$;

(d) $f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$; (e) $f(x,y) = \ln\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)$; (f) $g(x,y,z) = x^2 + \dfrac{xz}{y} + yz^3$;

(g) $g(x,y,z) = \dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}$; (h) $g(x,y,z) = \cos(x\sin(y\cos z))$; (i) $g(x,y,z) = \sqrt{x^2+\sqrt{y^2+\sqrt{z^2+1}}}$.

27. Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

(a) $z = x^2\sqrt{y+1}$, $(1,3,z_0)$; (b) $z = e^{x+2y}$, $(2,-1,z_0)$; (c) $z = \dfrac{\arcsin x}{\arccos y}$, $\left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}, z_0\right)$;

(d) $z = (2+x-3y)^4$, punkt wspólny wykresu i osi Oz; (e) $z = e^{x+y} - e^{4-y}$, punkt wspólny wykresu i osi Ox.

28. (a) Na wykresie funkcji $z = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$ wskazać punkty, w których płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny $x+y-z=5$.
(b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z = x^2+y^2$, która jest prostopadła do prostej $x=t$, $y=t$, $z=2t$, $t\in\mathbb{R}$.

Ćwiczenia 7

29. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości wyrażeń:

(a) $(1.02)^3\cdot(0.997)^2$; (b) $\sqrt[3]{(3.03)^3+(4.04)^3+(5.05)^3}$; (c) $2.97\cdot e^{0.05}$; (d) $\dfrac{\cos 0.05}{1.96}$.

30. (a) Wysokość i promień podstawy walca zmierzono z dokładnością 1 mm. Otrzymano $h = 350$ mm oraz $r = 145$ mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość V tego walca?

(b) Krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 12$ m. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu d, jeżeli długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2 cm.

(c) Oszacować błąd względny δ_V objętości prostopadłościamu V, jeżeli pomiaru jego boków x, y, z dokonano z dokładnością odpowiednio Δ_x, Δ_y, Δ_z.

*** 31.** Sprawdzić, że podane funkcje spełniają wskazane równania:

(a) $z = f\left(x^2 + y^2\right), \quad yz_x - xz_y = 0;$ (b) $z = xf\left(\sin(x-y)\right), \quad z_x + z_y = \dfrac{z}{x};$

(c) $z = x^n f\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad xz_x + yz_y = nz \ (n \in \mathbb{N});$ (d*) $z = \dfrac{x}{y}g(x) + h\left(\dfrac{y}{x}\right), \quad xyz_{xy} + y^2 z_{yy} + xz_x + 2yz_y = 0.$

32. Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}, \ (x_0,y_0) = (0,0), \ \boldsymbol{v} = \left(\sqrt{3}/2, \ 1/2\right);$

(b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}, \ (x_0,y_0) = (1,0), \ \boldsymbol{v} = \left(\sqrt{2}/2, \ \sqrt{2}/2\right).$

33. Obliczyć gradienty podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y) = x^3 + xy^2 + 2$, $(1,-2)$; (b) $f(x,y) = \ln(x + \ln y)$, $(e,1)$; (c) $f(x,y) = (1+xy)^y$, $(0,0)$;

(d) $g(x,y,z) = x\sqrt{y} - e^z \ln y$, $(0,1,0)$; (e) $g(x,y,z) = \dfrac{x}{y + \sin z}$, $(0,1,\pi)$; (f) $g(x,y,z) = \sqrt{x+\sqrt{y+\sqrt{z}}}$, $(1,1,1)$.

34. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2, \ (x_0,y_0) = (-3,4), \ \boldsymbol{v} = (12/13, \ 5/13);$

(b) $f(x,y) = x - \dfrac{y}{x^2} + y, \ (x_0,y_0) = (1,1), \ \boldsymbol{v} = (3/5, \ -4/5);$

(c) $g(x,y,z) = e^{x^2y-z}, \ (x_0,y_0,z_0) = (-1,1,-1), \ \boldsymbol{v} = (2/3,-2/3,1/3).$

35. (a) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = y - x^2 + 2\ln(xy)$ w punkcie $(-1/2, \ -1)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ tworzącego kąt α z dodatnią częścią osi Ox. Dla jakiego kąta α pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość największą?

(b) Wyznaczyć wersory $\boldsymbol{v}$, w kierunku których funkcja $f(x,y) = \sqrt{e^x}\left(x + y^2\right)$ w punkcie $(0,2)$ ma pochodną kierunkową równą 0.

Ćwiczenia 8

---

36. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funcji f i g:

(a) $f(x,y) = \cos\left(x^2+y^2\right);$ (b) $f(x,y) = ye^{xy};$ (c) $f(x,y) = x^2 + \dfrac{y^3}{x};$

(d) $f(x,y) = y\ln\dfrac{x}{y};$ (e) $g(x,y,z) = \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+z^2}};$ (f) $g(x,y,z) = \ln\left(x+y^2+z^3+1\right).$

Zauważyć, że odpowiednie pochodne cząstkowe mieszane są równe.

37. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y;$ (b) $f(x,y) = xe^{-y} + \dfrac{1}{x} + e^y;$ (c) $f(x,y) = xy^2(12-x-y) \ (x,y>0);$

(d) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y;$ (e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy;$ (f) $f(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y \ (x,y>0);$

(g) $f(x,y) = xy + \ln y + x^2;$ (h) $f(x,y) = e^{x-2y} + e^{y-x} + e^{6+y};$ (i) $f(x,y) = e^{x^2-y}(5-2x+y).$

38. Wyznaczyć ekstrema podanych funkcji, których argumenty spełniają wskazane warunki:

(a) $f(x,y) = x^2+y^2$, $3x+2y=6$; (b) $f(x,y) = x^2+y^2-8x+10$, $x-y^2+1=0$;

(c) $f(x,y) = x^2y + \ln x$, $8x+3y=0$; (d) $f(x,y) = 2x+3y$, $x^2+y^2=1$.

Ćwiczenia 9

39. Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych zbiorach lub w ich dziedzinach naturalnych:

(a) $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant 4\}$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{x - y^2}$; (c) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$;

(d) $f(x,y) = x^2 - y^2$, D – trójkąt o wierzchołkach $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$;

(e) $f(x,y) = x^4 + y^4$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9\}$;

(f*) $f(x,y) = (x+y)e^{-x-2y}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\, y \geqslant 0\}$.

40. W trójkącie o wierzchołkach $A = (-1,5)$, $B = (1,4)$, $C = (2,-3)$ znaleźć punkt $M = (x_0, y_0)$, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

41. Jakie powinny być długość a, szerokość b i wysokość h prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności V, aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?

42. Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:

$$k : \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ z + 1 = 0, \end{cases} \qquad l : \begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$$

43. Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216\,\mathrm{m}^3$. Do budowy ścian magazynu używane są płyty w cenie $30\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$, do budowy podłogi w cenie $40\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$, a sufitu w cenie $20\,\text{zł}/\mathrm{m}^2$. Znaleźć długość a, szerokość b i wysokość c magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.

44. Firma produkuje drzwi wewnętrzne i zewnętrzne. Następnie sprzedaje je odpowiednio po 500 zł i 2000 zł za sztukę. Koszt wyprodukowania x sztuk drzwi wewnętrznych i y zewnetrznych wynosi

$$K(x,y) = x^2 - xy + y^2 \ [\text{zł}].$$

Ile sztuk drzwi każdego rodzaju powinna wyprodukować firma, aby osiągnąć największy zysk?

45. Na paraboli $y = x^2/2$ wyznaczyć punkt, którego odległość od punktu $P = (4,1)$ jest najmniejsza.

Ćwiczenia 10

46. Obliczyć całki podwójne po wskazanych prostokątach:

(a) $\displaystyle\iint_R \left(x + xy - x^2 - 2y\right) dxdy$, $R = [0,1] \times [0,1]$; (b) $\displaystyle\iint_R \frac{x\,dxdy}{y^2}$, $R = [1,2] \times [2,4]$;

(c) $\displaystyle\iint_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$, $R = [0,2] \times [0,1]$; (d) $\displaystyle\iint_R (x \sin(xy))\, dxdy$, $R = [0,1] \times [\pi, 2\pi]$;

(e) $\displaystyle\iint_R e^{2x-y}\, dxdy$, $R = [0,1] \times [-1,0]$; (f) $\displaystyle\iint_R \frac{(x+y)\,dxdy}{e^x}$, $R = [0,1] \times [0,1]$.

47. Całkę podwójną $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D ograniczony jest krzywymi:

(a) $y = x^2$, $y = x + 2$; (b) $x^2 + y^2 = 4$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$ $(x, y \geqslant 0)$;

(c) $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 51 = 0$; (d) $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 3$ $(x < 0)$.

48. Obliczyć całki iterowane:

(a) $\displaystyle\int_1^2 dx \int_x^{x^2} \frac{y}{x^2}\, dy$; (b) $\displaystyle\int_1^4 dx \int_x^{2x} x^2\sqrt{y - x}\, dy$; (c) $\displaystyle\int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(x^3 + y^3\right) dy$; (d) $\displaystyle\int_0^3 dy \int_0^y \sqrt{y^2 + 16}\, dx$.

Narysować obszary całkowania.

49. Narysować obszar całkowania, a następnie zmienić kolejność całkowania w całkach:

(a) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-1}^{|x|} f(x,y)\,dy$; (b) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f(x,y)\,dy$; (c) $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$;

(d) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)\,dx$; (e*) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\,dy$; (f) $\int\limits_{1}^{e} dx \int\limits_{\ln x}^{1} f(x,y)\,dy$.

50. Obliczyć całki po obszarach normalnych ograniczonych wskazanymi krzywymi:

(a) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy,\ \ D:\ y=x,\ y=2-x^2$; (b) $\iint\limits_D x^2y\,dxdy,\ \ D:\ y=-2,\ y=\dfrac{1}{x},\ y=-\sqrt{-x}$;

(c) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy,\ \ D:\ y=\sqrt{x},\ x=0,\ y=1/2,\ y=1$; (d) $\iint\limits_D \left(xy+4x^2\right)\,dxdy,\ \ D:\ y=x+3,\ y=x^2+3x+3$;

(e) $\iint\limits_D x^2e^{xy}\,dxdy,\ \ D:\ y=x,\ y=1,\ x=0$; (f) $\iint\limits_D \dfrac{x\,dxdy}{x^2+y^2},\ \ D:\ x=1,\ x=2,\ y=x,\ y=x\sqrt{3}$.

Ćwiczenia 11

51. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

(a) $\iint\limits_D xy\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant 1,\ \dfrac{x}{\sqrt{3}}\leqslant y\leqslant\sqrt{3}x$; (b) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy,\ D:\ x\geqslant 0,\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 2$;

(c) $\iint\limits_D y^2e^{x^2+y^2}\,dxdy,\ D:\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ x^2+y^2\leqslant 1$; (d) $\iint\limits_D x^2\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant 2y$;

(e) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)\,dxdy,\ D:\ y\geqslant 0,\ y\leqslant x^2+y^2\leqslant x$; (f) $\iint\limits_D y\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant 2x\ (y\leqslant 0)$;

(g) $\iint\limits_D \sin\left(x^2+y^2\right)\,dxdy,\ D:\ x^2+y^2\leqslant\pi^2$; (h) $\iint\limits_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)\,dxdy,\ D:\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 9$.

Obszar D naszkicować we współrzędnych kartezjańskich.

52. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $y^2=4x,\ \ x+y=3,\ \ y=0\ (y\geqslant 0)$; (b) $x^2+y^2-2y=0,\ \ x^2+y^2-4y=0$;

(c) $x+y=4,\ \ x+y=8,\ \ x-3y=0,\ \ x-3y=5$; (d) $x^2+y^2=2y,\ \ y=\sqrt{3}|x|$.

53. Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami:

(a) $z=\sqrt{25-(x^2+y^2)},\ z=x^2+y^2-13$; (b) $x^2+y^2+z^2=4,\ z=1\ (z\geqslant 1)$;

(c) $x^2+y^2-2y=0,\ z=x^2+y^2,\ z=0$; (d) $z=5-x^2-y^2,\ z=1,\ z=4$;

(e*) $(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ z=xy,\ z=0$; (f*) $2z=x^2+y^2,\ y+z=4$.

54. Obliczyć pola płatów:

(a) $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2\leqslant 1$; (b) $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x^2+y^2-Rx\leqslant 0,\ z\geqslant 0$; (c) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ 1\leqslant z\leqslant 2$;

(d) część sfery $x^2+y^2+z^2=3$ leżąca wewnątrz paraboloidy $z=\left(x^2+y^2\right)/2$.

Ćwiczenia 12

55. Obliczyć podane całki potrójne po wskazanych prostopadłościanach:

(a) $\displaystyle\iiint\limits_U \frac{x\,dxdydz}{yz}$, $U = [1,2] \times [1,e] \times [1,e]$;

(b) $\displaystyle\iiint\limits_U (x+y+z)\,dxdydz$, $U = [1,2] \times [2,3] \times [3,4]$;

(c) $\displaystyle\iiint\limits_U \sin x \sin(x+y)\sin(x+y+z)\,dxdydz$, $U = [0,\pi] \times [0,\pi] \times [0,\pi]$;

(d) $\displaystyle\iiint\limits_U (x+y)e^{x+z}\,dxdydz$, $U = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

56. Całkę potrójną z funkcji $g(x,y,z)$ po obszarze U zamienić na całki iterowane, jeżeli U jest ograniczony powierzchniami o podanych równaniach:

(a) $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$, $z = 6$; (b) $x^2+y^2+z^2 = 25$, $z = 4$, $(z \geqslant 4)$; (c) $z = x^2+y^2$, $z = \sqrt{20-x^2-y^2}$.

*** 57.** Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania:

(a) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x,y,z)\,dz$; (b) $\displaystyle\int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} dy \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,dz$;

(c) $\displaystyle\int_0^3 dz \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} dx \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} f(x,y,z)\,dy$; (d) $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{x^2+y^2}^{1} f(x,y,z)\,dz$.

58. Obliczyć całki potrójne z podanych funkcji po wskazanych obszarach:

(a) $g(x,y,z) = e^{x+y+z}$, $U:\ x \leqslant 0,\ -x \leqslant y \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant -x$;

(b) $g(x,y,z) = \dfrac{1}{(3x+2y+z+1)^4}$, $U:\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ 0 \leqslant z \leqslant 1-x-y$;

(c) $g(x,y,z) = x^2+y^2$, $U:\ x^2+y^2 \leqslant 4,\ 1-x \leqslant z \leqslant 2-x$;

(d) $g(x,y,z) = x^2y^2$, $U:\ 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1$.

Ćwiczenia 13

59. Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć całki po wskazanych obszarach:

(a) $\displaystyle\iiint\limits_U \left(x^2+y^2+z^2\right)^2 dxdydz$, $U:\ x^2+y^2 \leqslant 4,\ 0 \leqslant z \leqslant 1$;

(b) $\displaystyle\iiint\limits_U xyz\,dxdydz$, $U:\ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$;

(c) $\displaystyle\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right) dxdydz$, $U:\ x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2,\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$;

(d) $\displaystyle\iiint\limits_U (x+y+z)\,dxdydz$, $U:\ x^2+y^2 \leqslant 1,\ 0 \leqslant z \leqslant 2-x-y$.

60. Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć całki po wskazanych obszarach:

(a) $\displaystyle\iiint\limits_U \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $U:\ 4 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 9$;

(b) $\displaystyle\iiint\limits_U \left(x^2+y^2\right) dxdydz$, $U:\ \sqrt{x^2+y^2} \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}$;

(c) $\iiint\limits_U z^2\,dxdydz,\ U:\ x^2+y^2+(z-R)^2 \leqslant R^2\ (R>0)$; (d) $\iiint\limits_U x^2\,dxdydz;\ U:\ x^2+y^2+z^2 \leqslant 4x$.

Ćwiczenia 14

61. Obliczyć objętości obszarów U ograniczonych podanymi powierzchniami:
(a) $x^2+y^2=9, \quad x+y+z=1, \quad x+y+z=5$; (b) $z=4-x^2, \quad z=y^2-5$;

(c) $z=\dfrac{1}{1+x^2+y^2}, \quad z=0, \quad x^2+y^2=4$; (d) $x^2+y^2+z^2=2, \quad y=1\ (y \geqslant 1)$.

62. Znaleźć położenia środków masy obszarów jednorodnych:
(a) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2 \leqslant y \leqslant 9\right\}$; (b) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0 \leqslant x \leqslant \pi,\ 0 \leqslant y \leqslant \sin^2 x\right\}$;
(c) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0 \leqslant x \leqslant 1,\ |y| \leqslant e^x\right\}$; (d) D — trójkąt równoramienny o podstawie a i wysokości h;
(e) D — trójkąt równoboczny o boku $2a$, do którego dołączono półkole o promieniu a;
(f) D — kwadrat o boku 1, z którego wycięto półkole o średnicy 1.

63. Obliczyć momenty bezwładności obszarów jednorodnych o masie M, względem wskazanych osi lub punktów:
(a) trójkąt równoboczny o boku a, podstawa; (b) odcinek paraboli o szerokości a i wysokości h, oś symetrii;
(c) kwadrat o boku a, przekątna; (a) ćwiartka koła o promieniu R, oś symetrii;
(e) koło o średnicy D, środek; (f) elipsa o półosiach a, b, oś symetrii.

64. Wyznaczyć położenia środków masy podanych obszarów jednorodnych:
(a) półkula o promieniu R; (b) stożek o promieniu podstawy R i wysokości H; (c) $U:\ x^2+y^2 \leqslant z \leqslant \sqrt{2-x^2-y^2}$.

65. Obliczyć momenty bezwładności obszarów jednorodnych o masie M, względem wskazanych osi:
(a) walec o promieniu podstawy R i wysokości H, oś walca;
(b) stożek o promieniu podstawy R i wysokości H, oś stożka;
(c) kula o promieniu R, oś symetrii;
(d) odcinek paraboloidy o średnicy D i wysokości H, oś obrotu.

Ćwiczenia 15 – kolokwium

Źródła zadań

[1] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory*, Wrocław 2019.

[2] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania*, Wrocław 2019.

[3] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy*, Wrocław 2018.

[4] Z.Skoczylas, *Studencki konkurs matematyczny*, Wrocław 2020.