Analiza Matematyczna 2.3A (MAT 1428) dla W4

Opracowanie: dr Marian Gewert, dr Zbigniew Skoczylas

Lista zdań obejmuje cały materiał kursu i jest podzielona na 7 części odpowiadających kolejnym ćwiczeniom. Na zajęciach należy rozwiązać jeden lub dwa podpunkty z każdego zadania. Pozostałe podpunkty przeznaczone są do samodzielnej pracy studentów. Na końcu listy zadań umieszczono przykładowe zestawy zadań z kolokwium, egzaminu podstawowego i poprawkowego, a także wykaz książek, z których są one zaczerpnięte.

Uzdolnionych studentów zachęcamy do przygotowania się w czasie semestru i następnie udziału w egzaminie na ocenę celującą z analizy matematycznej 2. Zadania z egzaminów z ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej http://wmat.pwr.edu.pl/studenci/kursy-ogolnouczelniane/egzaminy-na-ocene-celujaca oraz w książce [4].

Ćwiczenia 1

---

1. Znaleźć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^n$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+3n+2}$; (c) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n!}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$.

2. Korzystając z kryterium porównawczego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{n^3+2}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+2}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$; (d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+e^n}{e^n+4^n}$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n}{n3^n+2^n}$.

3. Korzystając z kryterium ilorazowego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2}{\sqrt{2n^6-1}}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^4+1}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n-1}{3^n-1}$; (d) $\sum_{n=0}^{\infty}4^n\ln\left(1+3^{-n}\right)$; (e) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\left(\pi/n^2\right)}{\sin\left(\pi/n\right)}$.

4. Korzystając z kryterium d'Alemberta zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2016^n}{(2n)!}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+1}{n^4+1}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\pi^n n!}$; (e) $\sum_{n=0}^{\infty}\sin^n\left(2018!\right)$.

5. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)^{2n}}{\left(3n^2+1\right)^n}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{3^n+5^n}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{n+1}\right)^n$.

6. Wykazać zbieżność odpowiedniego szeregu i następnie na podstawie warunku koniecznego zbieżności szeregów uzasadnić podane równości:

(a) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2016}}{3^n}=0$; (b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$; (c) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}=\infty$; (d*) $\lim_{n\to\infty}\frac{(3n)!(4n)!}{(5n)!(2n)!}=0$.

7. Korzystając z twierdzenia Leibniza uzasadnić zbieżność szeregów:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{3^n+4^n}$; (c) $\sum_{n=4}^{\infty}\sin\frac{(-1)^n}{n}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{n!}$.

8. Zbadać zbieżność oraz zbieżność bezwzględną szeregów:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n+1}$; (b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n^2+2}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2n}{3n+5}\right)^n$; (d) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$.

Ćwiczenia 2

9. Wyznaczyć przedziały zbieżności szeregów potęgowych:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{ne^n}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} (4x-12)^n$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+6)^n}{3^n-2^n}$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x+1)^{2n}}{2^n+3}$.

10. Znaleźć szeregi Maclaurina podanych funkcji i określić przedziały ich zbieżności:

(a) $\frac{5}{1-2x}$; (b) $\sin\frac{x}{2}$; (c) x^2e^{-x}; (d) $\frac{x^3}{16+x^2}$; (e) $\cosh x$; (f) $\sin^2 x$.

11. Korzystając z rozwinięć Maclaurina funkcji elementarnych obliczyć:

(a) $f^{(50)}(0),\ f(x)=x^2\cos x$; (b) $f^{(20)}(0),\ f(x)=xe^{-x}$;

(c) $f^{(11)}(0),\ f(x)=\frac{x^3}{1+x^2}$; (d) $f^{(10)}(0),\ f(x)=x\sin^2\frac{x}{2}$.

12. Wykorzystując twierdzenia o różniczkowaniu lub całkowaniu szeregów pokazać, że dla każdego $x\in(-1,1)$ prawdziwe są równości:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

13. Obliczyć sumy szeregów liczbowych:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^n}$; (b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{5^n}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)4^n}$.

Wskazówka. Wykorzystać równości z poprzedniego zadania.

Ćwiczenia 3

14. Korzystając z definicji obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu f_x, f_y funkcji f we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y)=\frac{x^2}{y}$, $(0,1)$; (b) $f(x,y)=\sqrt{x^6+y^4}$, $(0,0)$.

15. Obliczyć pochodne cząstkowe f_x, f_y funkcji f i pochodne cząstkowe g_x, g_y, g_z funkcji g:

(a) $f(x,y)=\frac{x^2+y^3}{xy^2}$; (b) $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\frac{1-xy}{x+y}$; (c) $f(x,y)=e^{\cos\frac{x}{y}}$;

(d) $f(x,y)=y\sqrt{x^2+y^2}$; (e) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt{x^2+y^2}-x\right)$; (f) $g(x,y,z)=x^2+\frac{xz}{y}+yz^3$;

(g) $g(x,y,z)=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$; (h) $g(x,y,z)=\cos(x\sin(y\cos z))$; (i) $g(x,y,z)=\sqrt{x^2+\sqrt{y^2+\sqrt{z^2+1}}}$.

16. Sprawdzić, że wskazana funkcja f spełnia podane równania:

(a) $f(x,y)=\ln\left(x^2+xy+y^2\right)$, $\quad xf_x+yf_y=2$; (b) $f(x,y)=\sqrt{x}\sin\frac{y}{x}$, $\quad xf_x+yf_y=\frac{f}{2}$.

17. Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

(a) $z=x^2\sqrt{y+1}$, $\ (1,3,z_0)$; (b) $z=e^{x+2y}$, $\ (2,-1,z_0)$; (c) $z=\frac{\arcsin x}{\arccos y}$, $\ \left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},z_0\right)$;

(d) $z=(2+x-3y)^4$, punkt wspólny wykresu i osi Oz; (e) $z=e^{x+y}-e^{4-y}$, punkt wspólny wykresu i osi Ox.

18. (a) Na wykresie funkcji $z=\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}$ wskazać punkty, w których płaszczyzna styczna jest równoległa do płaszczyzny $x+y-z=5$.

(b) Wyznaczyć równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $z=x^2+y^2$, która jest prostopadła do prostej $x=t$, $y=t$, $z=2t$, $t\in\mathbb{R}$.

19. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości wyrażeń:

(a) $(1.02)^3 \cdot (0.997)^2$; (b) $\sqrt[3]{3.03^3+4.04^3+5.05^3}$; (c) $2.97 \cdot e^{0.05}$; (d) $\dfrac{\cos 0.05}{1.96}$.

20. (a) Wysokość i promień podstawy walca zmierzono z dokładnością ± 1 mm. Otrzymano $h = 350$ mm oraz $r = 145$ mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość V tego walca?

(b) Krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3$ m, $b = 4$ m, $c = 12$ m. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu d, jeżeli długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2 cm.

(c) Oszacować błąd względny δ_V objętości prostopadłościamu V, jeżeli pomiaru jego boków x, y, z dokonano z dokładnością odpowiednio Δ_x, Δ_y, Δ_z.

Ćwiczenia 4

---

21. Korzystając z definicji obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $(x_0, y_0) = (0,0)$, $\boldsymbol{v} = \left(\sqrt{3}/2,\ 1/2\right)$;

(b) $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x_0, y_0) = (1,0)$, $\boldsymbol{v} = \left(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\right)$.

22. Obliczyć gradienty podanych funkcji we wskazanych punktach:

(a) $f(x,y) = x^3 + xy^2 + 2$, $(1,-2)$; (b) $f(x,y) = \ln(x + \ln y)$, $(e,1)$; (c) $f(x,y) = (1+xy)^y$, $(0,0)$;

(d) $g(x,y,z) = x\sqrt{y} - e^z \ln y$, $(0,1,0)$; (e) $g(x,y,z) = \dfrac{x}{y+\sin z}$, $(0,1,\pi)$; (f) $g(x,y,z) = \sqrt{x+\sqrt{y+\sqrt{z}}}$, $(1,1,1)$.

23. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (-3,4)$, $\boldsymbol{v} = (12/13,\ 5/13)$;

(b) $f(x,y) = x - \dfrac{y}{x^2} + y$, $(x_0, y_0) = (1,1)$, $\boldsymbol{v} = (3/5,\ -4/5)$;

(c) $g(x,y,z) = e^{x^2y-z}$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1,1,-1)$, $\boldsymbol{v} = (2/3,\ -2/3,\ 1/3)$.

24. (a) Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = y - x^2 + 2\ln(xy)$ w punkcie $(-1/2,-1)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ tworzącego kąt α z dodatnią częścią osi Ox. Dla jakiego kąta α pochodna ta ma wartość 0, a dla jakiego przyjmuje wartość największą?

(b) Wyznaczyć wersory $\boldsymbol{v}$, w kierunku których funkcja $f(x,y) = \sqrt{e^x}\left(x+y^2\right)$ w punkcie $(0,2)$ ma pochodną kierunkową równą 0.

25. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f i g :

(a) $f(x,y) = \cos\left(x^2+y^2\right)$; (b) $f(x,y) = ye^{xy}$; (c) $f(x,y) = x^2 + \dfrac{y^3}{x}$;

(d) $f(x,y) = y\ln\dfrac{x}{y}$; (e) $g(x,y,z) = \dfrac{y}{\sqrt{1+x^2+z^2}}$; (f) $g(x,y,z) = \ln\left(x+y^2+z^3+1\right)$.

Zauważyć, że odpowiednie pochodne cząstkowe mieszane są równe.

26. Sprawdzić, że podane funkcje spełniają warunek $f_{xx} + f_{yy} = 0$ (równanie Laplace'a):

(a) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{y}$; (b) $f(x,y) = \ln\left(x^2+y^2\right)$; (c) $f(x,y) = \cos x \cosh y$.

Ćwiczenia 5

27. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

(a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$; (b) $f(x,y) = xe^{-y} + \dfrac{1}{x} + e^y$; (c) $f(x,y) = xy^2(12 - x - y)$ $(x, y > 0)$;

(d) $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$; (e) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$; (f) $f(x,y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$ $(x, y > 0)$;

(g) $f(x,y) = xy + \ln y + x^2$; (h) $f(x,y) = e^{x-2y} + e^{y-x} + e^{6+y}$; (i) $f(x,y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$.

28. Wyznaczyć ekstrema podanych funkcji, których argumenty spełniają wskazane warunki:

(a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $3x + 2y = 6$; (b) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 8x + 10$, $x - y^2 + 1 = 0$;

(c) $f(x,y) = x^2y + \ln x$, $8x + 3y = 0$; (d) $f(x,y) = 2x + 3y$, $x^2 + y^2 = 1$.

*** 29.** Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych zbiorach lub w ich dziedzinach naturalnych:

(a) $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leqslant y \leqslant 4\}$;

(b) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2} + \sqrt{x - y^2}$; (c) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{4 - (x^2 + y^2)}$;

(d) $f(x,y) = x^2 - y^2$, D – trójkąt o wierzchołkach $(0,1)$, $(0,2)$, $(1,2)$;

(e) $f(x,y) = x^4 + y^4$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9\}$;

(f*) $f(x,y) = (x+y)e^{-x-2y}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geqslant 0,\ y \geqslant 0\}$.

*** 30.** (a) W trójkącie o wierzchołkach $A = (-1,5)$, $B = (1,4)$, $C = (2,-3)$ znaleźć punkt $M = (x_0, y_0)$, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

(b) Jakie powinny być długość a, szerokość b i wysokość h prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności V, aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?

(c) Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:

$$k : \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ z + 1 = 0, \end{cases} \qquad l : \begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$$

(d) Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216\,\mathrm{m}^3$. Do budowy ścian magazynu używane są płyty w cenie $30\,$zł/m^2, do budowy podłogi w cenie $40\,$zł/m^2, a sufitu w cenie $20\,$zł/m^2. Znaleźć długość a, szerokość b i wysokość c magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.

(f) Firma produkuje drzwi wewnętrzne i zewnętrzne. Następnie sprzedaje je odpowiednio po 500 zł i 2000 zł za sztukę. Koszt wyprodukowania x sztuk drzwi wewnętrznych i y zewnetrznych wynosi

$$K(x,y) = x^2 - xy + y^2 \text{ [zł]}.$$

Ile sztuk drzwi każdego rodzaju powinna wyprodukować firma, aby osiągnąć największy zysk?

(g) Na paraboli $y = x^2/2$ wyznaczyć punkt, którego odległość od punktu $P = (4,1)$ jest najmniejsza.

Ćwiczenia 6

31. Obliczyć całki podwójne po wskazanych prostokątach:

(a) $\displaystyle\iint\limits_R \big(x + xy - x^2 - 2y\big)\, dxdy$, $R = [0,1] \times [0,1]$; (b) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{x\, dxdy}{y^2}$, $R = [1,2] \times [2,4]$;

(c) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$, $R = [0,2] \times [0,1]$; (d) $\displaystyle\iint\limits_R (x\sin(xy))\, dxdy$, $R = [0,1] \times [\pi, 2\pi]$;

(e) $\displaystyle\iint\limits_R e^{2x-y}\, dxdy$, $R = [0,1] \times [-1,0]$; (f) $\displaystyle\iint\limits_R \frac{(x+y)\, dxdy}{e^x}$, $R = [0,1] \times [0,1]$.

32. Całkę podwójną $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D ograniczony jest krzywymi o równaniach:

(a) $y = x^2, \ \ y = x + 2$; (b) $x^2 + y^2 = 4, \ \ y = 2x - x^2, \ \ x = 0 \ (x, y \geqslant 0)$;

(c) $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 51 = 0$; (d) $x^2 - y^2 = 1, \ \ x^2 + y^2 = 3 \ (x < 0)$.

33. Obliczyć całki iterowane:

(a) $\int\limits_1^2 dx \int\limits_x^{x^2} \frac{y}{x^2}\,dy$; (b) $\int\limits_1^4 dx \int\limits_x^{2x} x^2\sqrt{y-x}\,dy$; (c) $\int\limits_{-2}^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \left(x^3 + y^3\right)\,dy$; (d) $\int\limits_0^3 dy \int\limits_0^y \sqrt{y^2+16}\,dx$.

Narysować obszary całkowania.

34. Narysować obszar całkowania, a następnie zmienić kolejność całkowania w całkach:

(a) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-1}^{|x|} f(x,y)\,dy$; (b) $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f(x,y)\,dy$; (c) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x,y)\,dy$;

(d) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x,y)\,dx$; (e*) $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \int\limits_{\cos x}^{\sin x} f(x,y)\,dy$; (f) $\int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^1 f(x,y)\,dy$.

35. Obliczyć całki po obszarach normalnych ograniczonych wskazanymi krzywymi:

(a) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy, \ \ D: \ y = x, \ y = 2 - x^2$; (b) $\iint\limits_D x^2y\,dxdy, \ \ D: \ y = -2, \ y = \frac{1}{x}, \ y = -\sqrt{-x}$;

(c) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy, \ \ D: \ y = \sqrt{x}, \ x = 0, \ y = 1/2, \ y = 1$; (d) $\iint\limits_D \left(xy + 4x^2\right)\,dxdy, \ \ D: \ y = x + 3, \ y = x^2 + 3x + 3$;

(e) $\iint\limits_D x^2e^{xy}\,dxdy, \ \ D: \ y = x, \ y = 1, \ x = 0$; (f) $\iint\limits_D \frac{x\,dxdy}{x^2+y^2}, \ \ D: \ x = 1, \ x = 2, \ y = x, \ y = x\sqrt{3}$;

(g) $\iint\limits_D e^{x^2}\,dxdy, \ \ D: \ y = 0, \ y = 2x, \ x = \sqrt{\ln 3}$; (h) $\iint\limits_D (2x - 3y + 2)\,dxdy, \ \ D: \ y = 0, \ y = \pi, \ x = -1, \ x = \sin y$.

36. Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych obszarach:

(a) $f(x,y) = \sin x \cos y, \ D = [0, \pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; (b) $f(x,y) = 2x - y, \ D: \ 0 \leqslant y \leqslant \pi, \ 0 \leqslant x \leqslant \sin y$.

Ćwiczenia 7

37. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

(a) $\iint\limits_D xy\,dxdy, \ D: \ x^2 + y^2 \leqslant 1, \ \frac{x}{\sqrt{3}} \leqslant y \leqslant \sqrt{3}x$; (b) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy, \ D: \ x \geqslant 0, \ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2$;

(c) $\iint\limits_D y^2e^{x^2+y^2}\,dxdy, \ D: \ x \geqslant 0, \ y \geqslant 0, \ x^2 + y^2 \leqslant 1$; (d) $\iint\limits_D x^2\,dxdy, \ D: \ x^2 + y^2 \leqslant 2y$;

(e) $\iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right)\,dxdy, \ D: \ y \geqslant 0, \ y \leqslant x^2 + y^2 \leqslant x$; (f) $\iint\limits_D y\,dxdy, \ D: \ x^2 + y^2 \leqslant 2x \ (y \leqslant 0)$.

Obszar D naszkicować we współrzędnych kartezjańskich.

38. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

(a) $y^2 = 4x, \ \ x + y = 3, \ \ y = 0 \ (y \geqslant 0)$; (b) $x^2 + y^2 - 2y = 0, \ \ x^2 + y^2 - 4y = 0$;

(c) $x + y = 4, \ \ x + y = 8, \ \ x - 3y = 0, \ \ x - 3y = 5$; (d) $x^2 + y^2 = 2y, \ \ y = \sqrt{3}|x|$.

39. Obliczyć objętości brył ograniczonych powierzchniami:

(a) $z=\sqrt{25-(x^2+y^2)}$, $z=x^2+y^2-13$; (b) $x^2+y^2+z^2=4,\ z=1\ (z\geqslant 1)$;

(c) $x^2+y^2-2y=0,\ z=x^2+y^2,\ z=0$; (d) $z=5-x^2-y^2,\ z=1,\ z=4$;

(e*) $(x-1)^2+(y-1)^2=1,\ z=xy,\ z=0$; (f*) $2z=x^2+y^2,\ y+z=4$.

40. Obliczyć pola płatów:

(a) $z=x^2+y^2,\ x^2+y^2\leqslant 1$; (b) $x^2+y^2+z^2=R^2,\ x^2+y^2-Rx\leqslant 0,\ z\geqslant 0$; (c) $z=\sqrt{x^2+y^2},\ 1\leqslant z\leqslant 2$;

(d) część sfery $x^2+y^2+z^2=3$ leżąca wewnątrz paraboloidy $z=\left(x^2+y^2\right)/2$.

41. Znaleźć położenia środków masy obszarów jednorodnych:

(a) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2\leqslant y\leqslant 9\right\}$;

(b) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leqslant x\leqslant\pi,\ 0\leqslant y\leqslant\sin^2 x\right\}$;

(c) $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\leqslant x\leqslant 1,\ |y|\leqslant e^x\right\}$;

(d) D — trójkąt równoramienny o podstawie a i wysokości h;

(e) D — trójkąt równoboczny o boku $2a$, do którego dołączono półkole o promieniu a;

(f) D — kwadrat o boku 1, z którego wycięto półkole o średnicy 1.

42. Obliczyć momenty bezwładności obszarów jednorodnych o masie M, względem wskazanych osi lub punktów:

(a) ćwiartka koła o promieniu R, oś symetrii; (b) odcinek paraboli o szerokości a i wysokości h, oś symetrii;

(c) kwadrat o boku a, przekątna; (d) trójkąt równoboczny o boku a, podstawa; (e) koło o średnicy D, środek.

Przykładowe zadania z kolokwiów

---

1. Zbadać zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n+1}{n3^n+1}$.
2. Uzasadnić zbieżność szeregu $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{\ln(n+1)}{n}$.
3. Znaleźć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{\sqrt{n}+2}$.
4. Funkcję $f(x)=\dfrac{x^2}{1+4x}$ rozwinąć w szereg Maclaurina. Podać wraz z uzasadnieniem przedział zbieżności.
5. Narysować dziedzinę funkcji $f(x,y)=\sqrt{y-x}\cdot\ln\left(9-x^2-y^2\right)$ i obliczyć jej pochodne cząstkowe pierwszego rzędu.
6. Napisać równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $(x+2)^2+(y-3)^2+z^2=6$ w punkcie $(0,2,-1)$.
7. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y)=\left(x^2-y\right)e^{2y-x}$ w punkcie $(x_0,y_0)=(1,1)$ w kierunku wersora tworzącego kąt $\alpha=\pi/3$ z dodatnią częścią osi Ox.
8. Wyznaczyć wszystkie punkty, w których pochodna kierunkowa funkcji $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x}}{y}$ w kierunku wersora $\left(\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2\right)$ przyjmuje wartość 0.
9. Znaleźć wszystkie ekstrema funkcji $f(x,y)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y+1}{\sqrt{x}}$.
10. Znaleźć wartości najmniejszą i największą funkcji $f(x,y)=x^2-y^2$ w trójkącie o wierzchołkach $(1,1)$, $(3,1)$, $(1,3)$.
11. Uzasadnić, że wśród wszytkich prostopadłościanów o objętości V, sześcian ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej.

12. Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{2^{-x}}^{4^x} f(x,y)\,dy$.

13. Obliczyć pole części powierzchni sfery $x^2+y^2+z^2=3$ leżącej wewnątrz paraboloidy $2z=x^2+y^2$. Sporządzić rysunek.

14. Obliczyć całkę $\iint\limits_D \frac{y\,dxdy}{(x^2+y^2)^3}$, gdzie $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 9,\ y\leqslant 0\right\}$.

15. Obliczyć objętośc bryły U ograniczonej powierzchniami: $x^2+y^2=1$, $z=x^2+y^2-3$, $z=5-\sqrt{x^2+y^2}$.

16. Jednorodna figura składa się z kwadratu o boku 2 i dołączonego do niego półkola o promieniu 1. Wyznaczyć położenie środka masy tej figury.

17. Cienka jednorodna płytka o masie M ma kształt trójkąta równobocznego o boku a. Obliczyć moment bezwładności płytki względem jej osi symetrii.

Przykładowe zestawy zadań z egzaminów

W rozwiązaniach zadań należy opisać rozumowanie prowadzące do wyniku, uzasadnić wyciągnięte wnioski, sformułować wykorzystane definicje, zacytować potrzebne twierdzenia (podać założenia i tezę), napisać zastosowane wzory ogólne (z wyjaśnieniem oznaczeń). Ponadto, jeśli jest to konieczne, należy sporządzić czytelny rysunek z pełnym opisem. Skreślone fragmenty pracy nie będą sprawdzane.

Egzamin podstawowy

Zestaw A

1. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}(2-3x)^n$.

2. Funkcję $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$ oraz jej drugą pochodną rozwinąć w szeregi Maclaurina i podać promienie ich zbieżności.

3. Wyznaczyć równania płaszczyzn stycznych do powierzchni $f(x,y)=x^3+y^2-6xy+15x$ w punktach, w których są one równoległe do płaszczyzny $6x-2y-z=0$.

4. Wyznaczyć największą wartość funkcji $f(x,y)=xy+x$ na zbiorze D ograniczonym łukami parabol $y=1-x^2$ i $y=x^2-x$.

5. Obliczyć objętość obszaru ograniczonego powierzchniami $z=3-y^2$, $z=2y$, $x=0$, $x=1$. Sporządzić rysunek.

6. Obliczyć pole części powierzchni $z=x^2+y^2$ leżącej między płaszczyznami $z=1$ i $z=4$. Sporządzić rysunek.

Zestaw B

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n2^n+1}{n3^n+1}$.

2. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y)=y\sqrt{x}+\frac{y}{\sqrt{x}}+\frac{8}{y^2}$.

3. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = \sqrt{e^x}\left(x+y^2\right)$ w punkcie $\left(0, 2+\sqrt{2}\right)$ w kierunku wersora $\boldsymbol{v}$ tworzącego kąt $\frac{\pi}{4}$ z dodatnim zwrotem osi Ox. W którym z ośmiu geograficznych kierunków: N, W, S, E, NW, NE, SW, SE szybkość wzrostu funkcji f w punkcie $\left(0, 2+\sqrt{2}\right)$ jest największa?
Uwaga. N-północ, W-zachód, S-południe, E-wschód.

4. Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce $\int\limits_1^{16} dx \int\limits_{\log_4 x}^{\log_2 x} f(x,y)\,dy$.

5. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchniami:$z = \sqrt{25-(x^2+y^2)}$, $z = 1+\sqrt{x^2+y^2}$.

6. Jednorodna figura składa się z trójkąta równobocznego o boku 2 i dołączonego do niego półkola o promieniu 1. Wyznaczyć położenie środka masy tej figury.

Egzamin poprawkowy

Zestaw A

1. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n}(4+2x)^n$.

2. Napisać rozwinięcie funkcji $f(x) = \frac{x^2}{3x^2-2}$ w szereg Maclaurina, a następnie obliczyć $f^{(17)}(0)$, $f^{(18)}0)$.

3. Wyznaczyć równania płaszczyzn stycznych do powierzchni $f(x,y) = x^3+y^2-6xy+15x$ w punktach, w których są one równoległe do płaszczyzny $6x-2y-z=0$.

4. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = \ln x^4 + \ln y^2 - 4y^2 - x$.

5. Na płaszczczyźnie zaznaczyć obszar D ograniczony krzywymi $x = y^2$, $x = 2-y^2$. Obliczyć całkę podwójną
$$\iint\limits_D xy\,dxdy.$$

6. Narysować bryłę ograniczoną powierzchniami $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$, $z = 3-x^2-y^2$ i obliczyć jej objętość.

Zestaw B

1. Wyznaczyć przedział zbieżności szeregu potęgowego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(2x+4)^n$.

2. Zbadać zbieżność szeregu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n+3^n}{n!}$.

3. Wyznaczyć najmniejszą wartość funkcji $f(x,y) = y^2-xy-y$ na zbiorze D ograniczonym parabolą $x-y^2+1 = 0$ i prostą $x=0$.

4. Narysować obszar całkowania i następnie zmienić kolejność całkowania w całce iterowanej
$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2+x^2} f(x,y)\,dy.$$

5. Obliczyć pole części powierzchni sfery $x^2+y^2+z^2=3$ leżącej wewnątrz paraboloidy $2z = x^2+y^2$. Sporządzić rysunek.

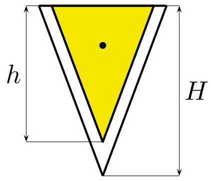
6. Wyznaczyć położenie środka masy jednorodnego półpierścienia o promieniu wewnętrznym r i zewnętrznym R.

Egzamin na ocenę celującą

Zestaw z 2016 r.

1. Zbadać zbieżność szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\left(3\ln\left(n^2+1\right)-2\ln\left(n^3+1\right)\right)$.

2. Wafelek do loda ma kształt stożka wydrążonego o wysokości H z jednakową grubością ścianek (rysunek). Masa lodowa (stożek) wypełniająca wafelek ma wysokość h $(h < H)$. Przyjmując, że wafelek i masa są jednorodne, a gęstość masy jest 2 razy większa od gęstości wafelka, wyznaczyć położenie środka masy całego loda.



3. Kątem nachylenia gładkiej powierzchni w ustalonym jej punkcie nazywamy kąt ostry między płaszczyzną styczną w tym miejscu, a poziomem. Obliczyć średni kąt nachylenia wzgórza o równaniu

$$z=\frac{1}{4}-x^2-y^2 \quad (z \geqslant 0).$$

4. Trzy boki czworokąta wypukłego mają długość 1. Jaka powinna być długość czwartego boku czworokąta oraz jak powinien być on ukształtowany, aby miał największe pole?

Źródła zadań

[1] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory*, Wrocław 2019.

[2] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Przykłady i zadania*, Wrocław 2019.

[3] M.Gewert, Z.Skoczylas, *Analiza matematyczna 2. Kolokwia i egzaminy*, Wrocław 2018.

[4] Z.Skoczylas, *Studencki konkurs matematyczny*, Wrocław 2020.