

# ALGEBRA Z GEOMETRIĄ ANALITYCZNA

## ALGEBRA LINIOWA 1 (rok akad. 2014/15)

Kursy MAP 1029, 1039, 1070, 1140, 1141, 3046, 3055

Lista zdań obejmuje cały materiał kursu oraz określa rodzaje i przybliżony stopień trudności zadań, które pojawią się na kolokwiach i egzaminach. Na ćwiczeniach należy rozwiązać 1-2 podpunkty z każdego zadania. Wyjątkiem są zadania oznaczone literą (P) oraz symbolem (\*). Zadania oznaczone literą (P) są proste i należy je rozwiązać samodzielnie. Z kolei zadania oznaczone gwiazdką (\*) są trudne. Te nieobowiązkowe zadania kierujemy do ambitnych studentów. Dodatkowo na końcu listy umieszczono po 4 przykładowe zestawy zadań z obu kolokwii oraz egzaminu podstawowego i poprawkowego.

Uzdolnionym studentom proponujemy udział w egzaminach na ocenę celującą z algebry i analizy. Zadania z tych egzaminów z kilku ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej

<http://www.im.pwr.edu.pl/StudenciCelujace.php>

Przed sprawdzianami warto zapoznać się z zestawieniem błędów, które studenci często popełniają na kolokwiach i egzaminach z matematyki.

[http://prac.im.pwr.edu.pl/~skoczylas/typowe\\_bledy\\_studentow.pdf](http://prac.im.pwr.edu.pl/~skoczylas/typowe_bledy_studentow.pdf)

Opracowanie: doc. dr Zbigniew Skoczylas

### Lista zadań\*

1. (P) Podać przykłady liczb rzeczywistych, dla których **nie zachodzą** równości:

- (a)  $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ ; (b)  $\sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$ ; (c)  $\frac{1}{x + y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ;  
(d)  $\sqrt{x^2} = x$ ; (e)  $\frac{x}{y} + \frac{u}{v} = \frac{x + u}{y + v}$ ; (f)  $\sin 2x = 2 \sin x$ ;  
(h)  $|x + y| = |x| + |y|$ ; (i)  $\frac{\log_2 a}{\log_2 b} = \log_2(a - b)$ ; (j)  $a^n \cdot a^m = a^{n \cdot m}$ .

2. Za pomocą indukcji matematycznej uzasadnić, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  zachodzą tożsamości:

- (a)  $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ ;  
(b)  $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}$ ;  
(c)  $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \dots \cdot \cos 2^n x = \frac{\sin 2^{n+1} x}{2^{n+1} \sin x}$  ( $x \neq k\pi$ ).

---

\*Zadania z listy pochodzą z książek *Algebra i geometria analityczna (Definicje, twierdzenia, wzory; Przykłady i zadania; Kolokwia i egzaminy)*, oraz *Wstęp do analizy i algebry*.

3. Korzystając z indukcji matematycznej uzasadnić nierówności:

(a)  $2^n > n^2$  dla  $n \geq 5$ ; (b)  $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$  dla  $n \in \mathbb{N}$ ;

(c)  $n! > 2^n$  dla  $n \geq 4$ ; (d)  $n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$  dla  $n \geq 6$ ;

(e)  $(1+x)^n \geq 1+nx$  dla  $x \geq -1$  oraz  $n \in \mathbb{N}$  (nierówność Bernoulliego).

4. Metodą indukcji matematycznej pokazać, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczba:

(a)  $n^5 - n$  jest podzielna przez 5; (b)  $4^n + 15n - 1$  jest podzielna przez 9.

5.\* Uzasadnić, że  $n$  kwadratów można podzielić na skończoną liczbę części, z których można złożyć kwadrat.

6. Zastosować wzór dwumianowy Newtona do wyrażeń:

(a)  $(2x+y)^4$ ; (b)  $(c-\sqrt{2})^6$ ; (c)  $\left(x+\frac{1}{x^3}\right)^5$ ; (d)  $(\sqrt{u}-\sqrt[4]{v})^8$ .

7.\* Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona obliczyć sumy:

(a)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ ; (b)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$ ; (c)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$ .

8. (a) W rozwinięciu wyrażenia  $\left(a^3 + \frac{1}{a^2}\right)^{15}$  znaleźć współczynnik przy  $a^5$ ;

(b) W rozwinięciu wyrażenia  $\left(\sqrt[4]{x^5} - \frac{3}{x^3}\right)^7$  znaleźć współczynnik przy  $\sqrt[4]{x}$ .



9. Porównując części rzeczywiste i urojone obu stron równań znaleźć ich rozwiązania:

(a)  $\bar{z} = (2-i)z$ ; (b)  $z^2 + 4 = 0$ ; (c)  $(1+3i)z + (2-5i)\bar{z} = 2i-3$ ; (d\*)  $z^3 = 1$ .

10. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

(a)  $\operatorname{Re}(z+1) = \operatorname{Im}(2z-4i)$ ; (b)  $\operatorname{Re}(z^2) = 0$ ; (c)  $\operatorname{Im}(z^2) \leq 8$ ; (d)  $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) > \operatorname{Im}(iz)$ .

11. Korzystając z interpretacji geometrycznej modułu różnicy liczb zespolonych wyznaczyć i narysować zbiory liczb zespolonych spełniających warunki:

(a)  $|z+2-3i| < 4$ ; (b)  $|z+5i| \geq |3-4i|$ ; (c)  $|z-1| = |1+5i-z|$ ; (d)  $|z+3i| < |z-1-4i|$ ;

(e)  $|iz+5-2i| < |1+i|$ ; (f)  $|\bar{z}+2-3i| < 5$ ; (g)  $\left|\frac{z-3i}{z}\right| > 1$ ; (h)  $\left|\frac{z^2+4}{z-2i}\right| \leq 5$ ;

(i)  $|z^2+2iz-1| < 9$ ; (j\*)  $2|z+1| < |z^2-z-2| \leq 3|z-2|$ .

12. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć:

(a)  $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$ ; (b)  $(\sqrt[5]{2} - i\sqrt[5]{2})^{15}$ ; (c)  $(2i - \sqrt{12})^9$ ;

(d\*)  $(i-2)^{24} (13+9i)^8$ ; (e\*)  $\frac{(7+i)^{11}}{(2+i)^{22}}$ .

13. Wyznaczyć i narysować na płaszczyźnie zespolonej elementy pierwiastków:

(a)  $\sqrt[4]{-16}$ ; (b)  $\sqrt[3]{27i}$ ; (c\*)  $\sqrt[4]{(2-i)^8}$ ; (d)  $\sqrt[6]{8}$ .

14. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania:

- (a)  $z^2 - 2z + 10 = 0$ ; (b)  $z^2 + 3iz + 4 = 0$ ; (c)  $z^4 + 5z^2 + 4 = 0$ ;  
(d)  $z^2 + (1 - 3i)z - 2 - i = 0$ ; (e)  $z^6 = (1 - i)^{12}$ ; (f)  $(z - i)^4 = (z + 1)^4$ .

★★★

15. (P) Znaleźć pierwiastki całkowite wielomianów:

- (a)  $x^3 + 3x^2 - 4$ ; (b)  $x^4 - 2x^3 + x^2 - 8x - 12$ ; (c)  $x^4 - x^2 - 2$ .

16. Znaleźć pierwiastki wymierne wielomianów:

- (a)  $12x^3 + 8x^2 - 3x - 2$ ; (b)  $18x^3 - 9x^2 - 2x + 1$ ; (c)  $6x^4 + 7x^2 + 2$ .

17. (P) Wyznaczyć pierwiastki rzeczywiste lub zespolone wraz z krotnościami wielomianów:

- (a)  $(x - 1)(x + 2)^3$ ; (b)  $(2x + 6)^2(1 - 4x)^5$ ; (c)  $(z^2 - 1)(z^2 + 1)^3(z^2 + 9)^4$ .

18. Nie wykonując dzielenia wyznaczyć reszty z dzielenia wielomianu  $P$  przez wielomian  $Q$ , jeżeli:

- (a)  $P(x) = x^8 + 3x^5 + x^2 + 4$ ,  $Q(x) = x^2 - 1$ ;  
(b)  $P(x) = x^{47} + 2x^5 - 13$ ,  $Q(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ ;  
(c)  $P(x) = x^{99} - 2x^{98} + 4x^{97}$ ,  $Q(x) = x^4 - 16$ ;  
(d\*)  $P(x) = x^{2006} + x^{1002} - 1$ ,  $Q(x) = x^4 + 1$ ;  
(e\*)  $P(x) = x^{444} + x^{111} + x - 1$ ,  $Q(x) = (x^2 + 1)^2$ .

19. Pokazać, że jeżeli liczba zespolona  $z_1$  jest pierwiastkiem wielomianu rzeczywistego  $P$ , to liczba  $\bar{z}_1$  także jest pierwiastkiem wielomianu  $P$ . Korzystając z tego faktu znaleźć pozostałe pierwiastki zespolone wielomianu  $P(x) = x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 16x + 15$  wiedząc, że jednym z nich jest  $x_1 = 1 + 2i$ .

20. Podane wielomiany rozłożyć na nierozkładalne czynniki rzeczywiste:

- (a)  $x^3 - 27$ ; (b)  $x^4 + 16$ ; (c)  $x^4 + x^2 + 4$ ; (d\*)  $x^6 + 1$ .

21. Podane funkcje wymierne rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste:

- (a)  $\frac{2x + 5}{x^2 - x - 2}$ ; (b)  $\frac{x + 9}{x(x + 3)^2}$ ; (c)  $\frac{3x^2 + 4x + 3}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$ ; (d)  $\frac{x^3 - 2x^2 - 7x + 6}{x^4 + 10x^2 + 9}$ .

★★★

22. Niech  $\mathbf{a} = (3, -3, 0, 9)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2, 1, 4)$  będą wektorami z przestrzeni  $\mathbb{R}^4$ . Wyznaczyć wektory:

- (a)  $\mathbf{x} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ ; (b)  $\mathbf{x} = \frac{1}{3}\mathbf{b} + 3\mathbf{a}$ .

23. Obliczyć:

- (a) odległość punktów  $A = (1, -2, 3, 0, 0)$ ,  $B = (0, 1, -2, 3, -4)$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^5$ ;  
(b) kąt między wektorami  $\mathbf{a} = (-1, 0, 2, 2)$ ,  $\mathbf{b} = (0, -2, 1, -2)$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^4$ .

24. (P) Trójkąt jest rozpięty na wektorach  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ . Wyrazić środkowe trójkąta przez  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ .

25. (P) Bokami równoległoboku są wektory  $\mathbf{a} = (-3, 4)$ ,  $\mathbf{b} = (1, 2)$ . Wyznaczyć kąt ostry między przekątnymi równoległoboku.

26. Długości wektorów  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  wynoszą odpowiednio 3, 5. Znamy iloczyn skalarny  $\mathbf{a} \circ \mathbf{b} = -2$ . Obliczyć  $(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \circ (2\mathbf{a} + 3\mathbf{b})$ .

**27. (P)** Wyznaczyć równanie prostej, która przechodzi przez punkt  $P = (-1, 3)$  i tworzy kąt  $120^\circ$  z dodatnią częścią osi  $Ox$ .

**28. (P)** Napisać równania prostej (normalne, krawędziowe, parametryczne) przechodzącej przez punkty  $P_1 = (2, 3)$ ,  $P_2 = (-3, 7)$ .

**29. (P)** Znaleźć punkty przecięcia prostej  $l : \begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = -6 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$  z osiami układu współrzędnych. Czy punkt  $P = (4, 7)$  należy do prostej  $l$ ?

**30.** Znaleźć punkt przecięcia prostych:  $k : \begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 3 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad l : \begin{cases} x = 2t, \\ y = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$ .

**31. (P)** Znaleźć równanie prostej, która przechodzi przez punkt  $P = (-1, 2)$  i jest

(a) równoległa do prostej  $3x - y + 2 = 0$ ; (b) prostopadła do prostej  $x + y = 0$ .

**32.** Dla jakiej wartości parametru  $m$ , odległość punktów  $P = (1, 0)$  i  $Q = (m + 3, -2)$  jest równa 4?

**33. (P)** Wyznaczyć odległość punktu  $P_0 = (-4, 1)$  od prostej  $l$  o równaniu  $3x + 4y + 12 = 0$ .

**34. (P)** Znaleźć odległość prostych równoległych  $l_1, l_2$  o równaniach odpowiednio  $x - 2y = 0$ ,  $-3x + 6y - 15 = 0$ .

**35.** Obliczyć wysokość trójkąta o wierzchołkach  $A = (0, 0)$ ,  $B = (-1, 3)$ ,  $C = (2, 5)$  opuszczoną z wierzchołka  $C$ .

**36. \*** Znaleźć równania dwusiecznych kątów wyznaczonych przez proste o równaniach  $3x + 4y - 2 = 0$ ,  $4x - 3y + 5 = 0$ .

★★★

**37. (a)** Dla jakich wartości parametrów  $p, q$  wektory  $\mathbf{a} = (1 - p, 3, -1)$ ,  $\mathbf{b} = (-2, 4 - q, 2)$  są równoległe?

(b) Dla jakich wartości parametru  $s$  wektory  $\mathbf{p} = (s, 2, 1 - s)$ ,  $\mathbf{q} = (s, 1, -2)$  są prostopadłe?

**38. (P)** Znaleźć wersor, który jest prostopadły do wektorów  $\mathbf{u} = (-1, 3, 0)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 1, 1)$ .

**39. (P)** Wyznaczyć cosinus kąta między wektorami  $\mathbf{p} = (0, 3, 4)$ ,  $\mathbf{q} = (2, 1, -2)$ .

**40. (a)** Obliczyć pole równoległoboku rozpiętego na wektorach  $\mathbf{u} = (-1, 2, 5)$ ,  $\mathbf{v} = (0, 3, 2)$ .

(b) Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach  $A = (0, 0, 1)$ ,  $B = (3, 0, 0)$ ,  $C = (0, -5, 0)$ .

(c) Trójkąt ma wierzchołki  $A = (0, 0, 1)$ ,  $B = (2, 3, -2)$ ,  $C = (1, 1, 4)$ . Obliczyć wysokość trójkąta opuszczoną z wierzchołka  $C$ .

**41. (a)** Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach:  $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{b} = (0, 4, 1)$ ,  $\mathbf{c} = (-1, 0, 2)$ .

(b) Obliczyć objętość czworościanu o wierzchołkach:  $A = (1, 1, 1)$ ,  $B = (1, 2, 3)$ ,  $C = (0, 4, 1)$ ,  $D = (2, 2, 2)$ .

(c) Dla czworościanu z punktu (b) obliczyć wysokość opuszczoną z wierzchołka  $A$ .

**42.** Znaleźć równania normalne i parametryczne płaszczyzny:

(a) przechodzącej przez punkty  $P = (1, -1, 0)$ ,  $Q = (2, 3, 7)$ ,  $R = (4, 0, 1)$ ;

(b) przechodzącej przez punkt  $A = (-2, 5, 4)$  oraz zawierającą oś  $Oz$ ;

(c) przechodzącej przez punkt  $A = (-2, 5, 4)$  oraz prostopadłej do osi  $Oy$ .

43. Pokazać, że równania parametryczne:

$$\begin{cases} x = 3 - t + 2s, \\ y = -1 + t, \\ z = 2 + t - 3s \end{cases} \quad (t, s \in \mathbb{R}), \quad \begin{cases} x = 4 + 3t + 3s, \\ y = t - s, \\ z = -2t - 4s \end{cases} \quad (t, s \in \mathbb{R})$$

przedstawiają tę samą płaszczyznę.

44. (a) Płaszczyznę  $\pi : 2x + y - z - 7 = 0$  zapisać w postaci parametrycznej.

(b) Płaszczyznę  $\pi : \begin{cases} x = t + s, \\ y = -2 - 2s, \\ z = 3 + 3t - s \end{cases} \quad (t, s \in \mathbb{R})$  przekształcić do postaci normalnej.

45. Znaleźć równanie parametryczne i krawędziowe prostej:

(a) przechodzącej przez punkty  $A = (-3, 4, 1)$ ,  $B = (0, 2, 1)$ .

(b) przechodzącej przez punkt  $P = (3, -1, 2)$  i przecinającej prostopadle oś  $Oy$ .

46. Pokazać, że równania:

$$\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 - 3t, \\ z = 4t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}), \quad \begin{cases} x = 2t, \\ y = -1 + 6t, \\ z = 4 - 8t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

przedstawiają tę samą prostą.

47. (a) Prosta  $l : \begin{cases} x + y - 3 = 0, \\ -y + z - 1 = 0 \end{cases}$  zapisać w postaci parametrycznej.

(b) Prosta  $l : x = 3, y = 2 - 2t, z = t \quad (t \in \mathbb{R})$  zapisać w postaci krawędziowej.

48. Wyznaczyć punkt przecięcia:

(a) prostej  $l : x = t, y = 1 - 2t, z = -3 + 2t \quad (t \in \mathbb{R})$  oraz płaszczyzny  $\pi : 3x - y - 2z - 5 = 0$ ;

(b) płaszczyzn  $\pi_1 : x + 2y - z - 5 = 0, \pi_2 : x + 2y + 2 = 0, \pi_3 : x + y + z = 0$ ;

(c) prostych  $l_1 : x = 1 - t, y = 1, z = -3 + 2t \quad (t \in \mathbb{R}), l_2 : x = t, y = 3 - 2t, z = 2 - 5t \quad (t \in \mathbb{R})$ .

49. Obliczyć odległość:

(a) punktu  $P = (0, 1, -2)$  od płaszczyzny  $\pi : 3x - 4y + 12z - 1 = 0$ ;

(b) płaszczyzn równoległych  $\pi_1 : x - 2y + 2z - 3 = 0, \pi_2 : -2x + 4y - 4z + 18 = 0$ ;

(c) punktu  $P = (2, -5, 1)$  od prostej  $l : x = t, y = 1 - 2t, z = -3 + 2t \quad (t \in \mathbb{R})$ ;

(d) prostych równoległych  $l_1 : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - 2y - z - 1 = 0, \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - 2y - z + 4 = 0; \end{cases}$

(e) prostych skośnych

$$l_1 : x = 1 - t, y = 1, z = -3 + 2t \quad (t \in \mathbb{R}), \quad l_2 : x = s, y = 3 - 2s, z = 1 - 5s \quad (s \in \mathbb{R}).$$

50. Wyznaczyć rzut prostopadły punktu  $P = (1, -2, 0)$  na:

(a) płaszczyznę  $\pi : x + y + 3z - 5 = 0$ ; (b) prostą  $l : x = 1 - t, y = 2t, z = 3t$ .

51. Obliczyć kąt między:

(a) płaszczyznami  $\pi_1 : x - y + 3z = 0, \pi_2 : -2x + y - z + 5 = 0$ ;

(b) prostą  $l : \begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x - 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$  i płaszczyznę  $\pi : x + y = 0$ ;

(c) prostymi  $l_1 : x = -t, y = 1 + 2t, z = -3 \quad (t \in \mathbb{R}), l_2 : x = 0, y = -2s, z = 2 + s \quad (s \in \mathbb{R})$ .



**52.** We wskazanej przestrzeni zbadać liniową niezależność układów wektorów:

(a)  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbf{a}_1 = (2, 3)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (-1, 0)$ ;

(b)  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{b}_1 = (1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{b}_2 = (3, 2, 1)$ ,  $\mathbf{b}_3 = (1, 1, 1)$ ;

(c)  $\mathbb{R}^4$ ,  $\mathbf{c}_1 = (1, 0, 0, 0)$ ,  $\mathbf{c}_2 = (-1, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{c}_3 = (1, -1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{c}_4 = (-1, 1, -1, 1)$ .

**53.** Zbadać, czy układy wektorów są bazami wskazanych przestrzeni liniowych  $\mathbb{R}^n$ ,

(a)  $\{(1, 2, 0), (-1, 0, 3), (0, -2, -3)\}$ ,  $\mathbb{R}^3$ ;

(b)  $\{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ ,  $\mathbb{R}^4$ ;

(c)  $\{(1, -1, 0, 2), (1, 0, 3, 0), (0, 1, 3, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ ,  $\mathbb{R}^4$ .

**54.** Znaleźć bazy i wymiary podprzestrzeni:

(a)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x + 2y - z = 0\}$ ;

(b)  $B = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = 2y = -t\}$ ;

(c)  $C = \{(u, v, x, y, z) \in \mathbb{R}^5 : u + v = 0, x + y + z = 0\}$ .

**55.** Zbadać, czy przekształcenia są liniowe:

(a)  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2$ ;

(b)  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F(x, y, z) = (-x, 5x + y, y - 2z)$ ;

(c)  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $F(x) = (0, x^2, 0, -3x)$ ;

(d)  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1x_2, x_3x_4)$ .

**56.** Znaleźć macierze przekształceń liniowych w standardowych bazach:

(a)  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F(x, y) = (x, y, x - y)$ ;

(b)  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $F(x, y, z) = (y, z, x, x + y + z)$ ;

(c)  $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y, z, t) = (x + y + z + t, y - t)$ .

**57.** (a) Uzasadnić, że obrót na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$  wokół początku układu współrzędnych o kat  $\varphi$  jest przekształceniem liniowym. Znaleźć macierz tego obrotu w bazach standardowych.

(b) Pokazać, że symetria względem osi  $Oz$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  jest przekształceniem liniowym. Znaleźć macierz tej symetrii w bazach standardowych.



**58. (P)** Dla par macierzy  $A, B$  wykonać (jeśli to jest możliwe) działania  $3A - \frac{1}{2}B$ ,  $A^T$ ,  $AB$ ,  $BA$ ,  $A^2$ :

(a)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$ ; (b)  $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ ;

(c)  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ ; (d)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ .

**59. (P)** Rozwiązać równanie macierzowe  $3 \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - X \right) = X + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ .

60. (P) Znaleźć niewiadome  $x, y, z$  spełniające równanie  $2 \begin{bmatrix} x+2 & y+3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ y & z \end{bmatrix}^T$ .

61. Podać przykłady macierzy kwadratowych  $A, B$ , które spełniają warunki:

(a)  $AB \neq BA$ ; (b)  $AB = \mathbf{0}$ , ale  $A \neq \mathbf{0}, B \neq \mathbf{0}$ ; (c)  $A^2 = \mathbf{0}$ , ale  $A \neq \mathbf{0}$ .

62. \* Pokazać, że każdą macierz kwadratową można przedstawić jednoznacznie jako sumę macierzy symetrycznej ( $A^T = A$ ) i antysymetrycznej ( $A^T = -A$ ). Napisać to przedstawienie dla macierzy

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & -2 \\ -3 & 5 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & -3 & -4 \\ 6 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

63. Dane są przekształcenia liniowe:  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  określone wzorem  $L(x, y) = (x, y, x + y)$  oraz  $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  określone wzorem  $K(u, v, w) = u - w$ . Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy złożenia przekształceń znaleźć macierz przekształcenia  $K \circ L$ .

★★★

64. Napisać rozwinięcia Laplace'a wyznaczników wg wskazanych kolumn lub wierszy (nie obliczać wyznaczników w otrzymanych rozwinięciach):

(a)  $\begin{vmatrix} -1 & 4 & \mathbf{3} \\ -3 & 1 & \mathbf{0} \\ 2 & 5 & \mathbf{-2} \end{vmatrix}$ , trzecia kolumna; (b)  $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ -2 & 4 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \end{vmatrix}$ , czwarty wiersz.

65. Obliczyć wyznaczniki:

(a)  $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}$ ; (b)  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ ; (c)  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \end{vmatrix}$ .

66. Korzystając z własności wyznaczników uzasadnić, że macierze są osobliwe:

(a)  $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 5 & -6 \end{bmatrix}$ ; (b)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ ; (c)  $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & -2 \\ 7 & 5 & 2 & -5 \\ 5 & 7 & 4 & -4 \\ 3 & 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ .

67. (a) Wiadomo, że  $\det \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & 0 \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} & 0 \\ 5 & -2 & 3 \end{bmatrix} = -24$ . Obliczyć  $\det \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix}$ ;

(b) Wiadomo, że  $\det \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \mathbf{x} & \mathbf{y} & 0 \\ 5 & \mathbf{z} & \mathbf{t} & 0 \\ 7 & -4 & 5 & -2 \end{bmatrix} = 18$ . Obliczyć  $\det \begin{bmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{y} \\ \mathbf{z} & \mathbf{t} \end{bmatrix}$ .

68. Jakie są możliwe wartości wyznacznika macierzy kwadratowej  $A$  stopnia  $n$  spełniającej warunki:

(a)  $A^3 = 4A$  dla  $n = 3, 4$ ; (b)  $A^T = -A^2$  dla  $n = 3, 4$ ?

69. Obliczyć  $\det(2A)$ , jeżeli  $\det(3A) = 54$  i  $\det(4A) = 128$ .

70. (a) Obliczyć pole równoległoboku rozpiętego na wektorach:  $a = (2, -4)$ ,  $b = (3, 7)$ ;

(b) Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach:  $a = (1, 1, 0)$ ,  $b = (0, 1, 1)$ ,  $c = (1, 0, 1)$ .

71.\* Obliczyć wyznaczniki macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 & \dots & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 5 \end{bmatrix}_{n \times n}.$$

★★★

72. Korzystając z twierdzenia o postaci macierzy odwrotnej wyznaczyć macierze odwrotne do:

$$(a) A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{bmatrix}; \quad (b) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}; \quad (c) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

73. Korzystając z metody dołączonej macierzy jednostkowej znaleźć macierze odwrotne do :

$$(a) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}; \quad (b) A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -12 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}; \quad (c) A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

74. Wiadomo, że  $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 0 \\ 10 & 12 & -6 \end{bmatrix}$ . Wyznaczyć  $\left(\frac{1}{2}A\right)^{-1}$ .

75. Macierze  $A, B$  mają stopień 3. Ponadto  $\det(A) = 4$  oraz  $\det(B) = -3$ . Obliczyć:

$$(a) \det[A \cdot (6B)^{-1}]; \quad (b) \det[A^{-1} \cdot (2B)^3 \cdot A^2].$$

76. Znaleźć rozwiązania równań macierzowych:

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad (b) X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$(c) X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix};$$

$$(e) X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}; \quad (f) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

77. Korzystając ze wzorów Cramera wyznaczyć wskazaną niewiadomą z układów równań liniowych:

$$(a) \begin{cases} 2x - y = 0, \\ 3x + 2y = 5, \end{cases} y; \quad (b) \begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2, \end{cases} x; \quad (c) \begin{cases} 2x + 3y + 11z + 5t = 2, \\ x + y + 5z + 2t = 1, \\ 2x + y + 3z + 2t = -3, \\ x + y + 3z + 4t = -3, \end{cases} z.$$





**78.** Korzystając z interpretacji geometrycznej przekształceń liniowych znaleźć ich jądra, obrazy i rzędy:

- (a)  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , obrót o kąt  $\alpha = \pi/3$  wokół początku układu;
- (b)  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , rzut prostokątny na prostą  $x + y = 0$ ;
- (c)  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , symetria względem płaszczyzny  $y = z$ ;
- (d)  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , obrót wokół osi  $Oy$  o kąt  $\pi/2$ .

**79.** Wyznaczyć jądra, obrazy oraz rzędy przekształceń liniowych:

- (a)  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x_1, x_2) = x_1 - 3x_2$ ;
- (b)  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$ ;
- (c)  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F(x, y, z) = (-x, 5x + y, y - 2z)$ ;
- (d)  $L : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $F(x) = (0, x, 0, -x)$ .

**80.** Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układy równań:

$$(a) \begin{cases} x + y + 2z = -1, \\ 2x - y + 2z = -4, \\ 4x + y + 4z = -2; \end{cases} \quad (b) \begin{cases} 3x - 2y - 5z + t = 3, \\ 2x - 3y + z + 5t = -3, \\ x + 2y - 4t = -3, \\ x - y - 4z + 9t = 22. \end{cases}$$

**81.** (a) Znaleźć trójkąt kwadratowy, który przechodzi przez punkty  $(-1, 2)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(2, 4)$ .

(b) Wyznaczyć współczynniki  $a, b, c$  funkcji  $y = a2^x + b3^x + c4^x$ , która w punktach  $-1, 0, 1$  przyjmuje odpowiednio wartości  $3/4, 1, 1$ .

(c) Funkcja  $y(x) = A \cos 2x + B \sin 2x$  spełnia równanie różniczkowe  $y'' - 6y' + 13y = 25 \sin 2x$ . Wyznaczyć współczynniki  $A, B$ .

**82.** (a) Dla jakich wartości parametru  $m$ , podany układ jednorodny ma niezerowe rozwiązanie

$$\begin{cases} mx + y + 2z = 0, \\ 2x - y + mz = 0, \\ mx + y + 4z = 0? \end{cases}$$

(b) Dla jakich wartości parametrów  $a, b, c, d$ , podany układ równań liniowych jest sprzeczny

$$\begin{cases} x + y = a, \\ z + t = b, \\ x + z = c, \\ y + t = d? \end{cases}$$

(c) Znaleźć wartości parametru  $p$ , dla których podany układ równań liniowych ma tylko jedno rozwiązanie

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -1, \\ 2x - py + z = 3, \\ 2x + y - pz = 5. \end{cases}$$



**83.** Korzystając z definicji wyznaczyć wektory i wartości własne przekształceń liniowych:

- (a) symetria względem osi  $Oy$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^2$ ;
- (b) obrót w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  wokół osi  $Ox$  o kąt  $\pi/6$ ;

(c) symetria w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  względem płaszczyzny  $yOz$ ;

(d) rzut prostokątny na oś  $Oy$  w przestrzeni  $\mathbb{R}^3$ .

**84.** Znaleźć wartości i wektory własne przekształceń liniowych:

(a)  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y) = (x + y, 2x + 2y)$ ;

(b)  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F(x, y, z) = (-x, 5x + y, y - 2z)$ ;

(c)  $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $F(x, y, z, t) = (0, x, 0, y)$ .

★★★

**85. (P)** Napisać równanie okręgu, którego średnicą jest odcinek o końcach  $A = (-1, 3)$ ,  $B = (5, 7)$ .

**86. (P)** Wyznaczyć współrzędne środka i promień okręgu  $x^2 - 4x + y^2 + 6y + 2 = 0$ .

**87. (P)** Znaleźć równanie okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$  o wierzchołkach  $A = (0, 0)$ ,  $B = (8, 0)$ ,  $C = (0, 6)$ .

**88.** Wyznaczyć równanie okręgu, o środku  $S = (3, 4)$ , który jest styczny do prostej  $l : 3x - 4y - 12 = 0$ .

**89.** Znaleźć równanie okręgu, który przechodzi przez punkty  $P = (3, 4)$ ,  $Q = (5, 2)$  i ma środek na osi  $Ox$ .

**90.** Dolna połowa okręgu  $x^2 + 8x + y^2 - 10y + 2 = 0$  jest wykresem funkcji  $f$  zmiennej  $x$ . Wyznaczyć funkcję  $f$  oraz określić jej dziedzinę.

**91. \*** Znaleźć równanie okręgu, który jest styczny do obu osi układu współrzędnych oraz przechodzi przez punkt  $A = (5, 8)$ . Ile rozwiązań ma zadanie?

**92.** Znaleźć równanie stycznej okręgu  $x^2 + y^2 = 25$ :

(a) w punkcie  $(-3, 4)$ ;

(b) przechodzącej przez punkt  $(-5, 10)$ ;

(c) równoległej do prostej  $x - y - 4 = 0$ ; (d) prostopadłej do prostej  $x + 2y = 0$ .

**93. (P)** Wyznaczyć osie, współrzędne ognisk oraz mimośród elipsy  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

**94.** Punkty  $F_1 = (-5, 0)$ ,  $F_2 = (5, 0)$  są ogniskami elipsy. Znaleźć równanie tej elipsy, jeżeli jednym z jej wierzchołków jest punkt  $W = (0, -3)$ .

**95.** Naszkicować elipsę o równaniu  $4x^2 - 8x + 9y^2 + 36y + 4 = 0$ .

**96.** Lewa połowa elipsy  $4x^2 + 25y^2 = 100$  jest wykresem funkcji  $f$  zmiennej  $y$ . Znaleźć funkcję  $f$  oraz określić jej dziedzinę.

**97. (P)** Wyznaczyć osie, współrzędne ognisk oraz równania asymptot hiperboli  $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$ .

**98.** Narysować hiperbolę wraz z ogniskami i asymptotami:

(a)  $9(y + 5)^2 - 16(x - 2)^2 = 144$ ; (b)  $4x^2 - 25y^2 + 8x = 0$ .

**99.** Wyznaczyć współrzędne ogniska, wierzchołka oraz podać równanie kierownicy paraboli o równaniu:

(a)  $y^2 = 12x$ ; (b)  $y = x^2 + 6x$ .

**100.** Napisać równanie paraboli, której:

(a) kierownicą jest prosta  $y = -2$ , a punkt  $W = (-1, 6)$  – wierzchołkiem;

(b) kierownicą jest prosta  $x = 1$ , a punkt  $W = (5, 1)$  – wierzchołkiem.

**101.** Jakie krzywe przedstawiają równania:

(a)  $x^2 - y^2 + 4 = 0$ ; (b)  $(x - y)^2 = 1$ ; (c)  $x^2 + y^2 = 2xy$ ?

# Przykładowe zestawy zadań z kolokwiów i egzaminów

W rozwiązaniach zadań należy opisać rozumowanie prowadzące do wyniku, uzasadnić wyciągnięte wnioski, sformułować wykorzystane definicje, zacytować potrzebne twierdzenia (podać założenia i tezę), napisać zastosowane wzory ogólne (z wyjaśnieniem oznaczeń). Ponadto, jeśli jest to konieczne, należy sporządzić czytelny rysunek z pełnym opisem. Skreślone fragmenty pracy nie będą sprawdzane.

## I kolokwium

### Zestaw A

1. Liczba  $z_1 = 2 - i$  jest pierwiastkiem wielomianu  $W(z) = z^4 - 4z^3 + 3z^2 + 8z - 10$ . Znaleźć pozostałe pierwiastki wielomianu.
2. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć  $(\sqrt{27} - 3i)^9$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.
3. Zapisać w postaci algebraicznej elementy pierwiastka  $\sqrt[4]{-4}$ .

### Zestaw B

1. Wyznaczyć i narysować zbiór liczb zespolonych  $z$ , które spełniają warunek  $|z - i + 2| \geq |4i - 3|$ .
2. Podać w postaci algebraicznej elementy pierwiastka  $\sqrt[3]{(2 - 3i)^6}$ .
3. Funkcję wymierną  $\frac{4x^3 - 3x^2 - 2x - 3}{x^4 - 1}$  rozłożyć na rzeczywiste ułamki proste.

### Zestaw C

1. Nie wykonując dzielenia znaleźć resztę z dzielenia wielomianu  $W(x) = 2x^{47} - 3x^5 + 4$  przez wielomian  $P(x) = x^4 - 1$ .
2. Rozwiązać równanie  $(z - i)^3 = (1 + 2i)^3$ .
3. Narysować zbiór liczb zespolonych  $z$ , które spełniają warunek  $|z - 1 - 3i| \geq |z + 5|$ .

### Zestaw D

1. Znaleźć pierwiastki zespolone wielomianu  $W(x) = x^3 + x + 10$ .
2. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć  $\left(\frac{1 + \sqrt{3}i}{1 - i}\right)^8$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.
3. Narysować zbiór liczb zespolonych  $z$ , które spełniają warunek  $|z^2 + 9| \leq 5|z + 3i|$ .

## II kolokwium

### Zestaw A

1. Rozwiązać równanie macierzowe  $X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \end{bmatrix} = [1, -2, 5]$ .

2. Znaleźć rzut punktu  $P = (-2, 0, 3)$  na prostą  $l : \begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0, \\ 2x + y - z + 1 = 0. \end{cases}$

3. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układ równań  $\begin{cases} 2x - y + 3z = -3, \\ x + y - z = 4, \\ -x + 3y + 2z = 3, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

## Zestaw B

1. Obliczyć odległość punktu  $P = (2, 1, 3)$  od prostej  $k : \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 - 2t, \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ .

2. Napisać macierze przekształceń liniowych  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $K : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , w bazach standardowych przestrzeni  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}^3$ , jeżeli  $L(x, y) = (x + 3y, -x, x - 2y)$ ,  $K(u, v, w) = (u - v + 2w, 2v - u)$ . Wyznaczyć macierz złożenia  $L \circ K$ .

3. Rozwiązać równanie macierzowe:  $X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ .

## Zestaw C

1. Znaleźć równanie płaszczyzny, która zawiera punkty  $A = (1, 0, 4)$ ,  $B = (-2, 3, 5)$  oraz jest prostopadła do płaszczyzny  $\pi : x - 2y - 3z + 12 = 0$ .

2. Dane są punkty  $A = (1, 2, -1)$ ,  $B = (3, 1, 2)$ . Na osi  $Oy$  znaleźć punkt  $C$  taki, aby pole trójkąta  $ABC$  było równe 10.

3. Układ równań  $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0, \\ 3x + y - z = 5, \\ x - y + 2z = 2. \end{cases}$  zapisać w formie macierzowej. Następnie korzystając z macierzy odwrotnej wyznaczyć jego rozwiązanie.

## Zestaw D

1. Znaleźć obraz symetryczny punktu  $P = (1, -2, 0)$  względem płaszczyzny  $\pi : 2x + y - z + 1 = 0$ .

2. Dla jakich wartości parametru  $p$  układ równań  $\begin{cases} 2x + py - z = p, \\ -y + pz = -1, \\ -2 \quad + 1z = 1 \end{cases}$  jest układem Cramera? Dla  $p = 1$  wyznaczyć  $x$  stosując wzory Cramera.

3. Jaką krzywą stożkową przedstawia równanie  $4x^2 + 16x - 25y^2 + 150y - 309 = 0$ ? Znaleźć półosie i współrzędne ognisk.

## Egzamin podstawowy

### Zestaw A

1. Nie wykonując dzielenia znaleźć resztę z dzielenia wielomianu  $x^{98} + 17x^{95} + x^2 - 3x + 1$  przez trójmian  $x^2 + 1$ .

2. Obliczyć odległość punktu  $P = (1 - 2, 4)$  od prostej  $l : \begin{cases} x + y - z = 2, \\ 2x - y + z = 4. \end{cases}$
3. Funkcję wymierną  $\frac{3x^2 - 2x - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$  rozłożyć na ułamki proste.
4. Rozwiązać równanie macierzowe  $X^{-1} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ .
5. Jaką krzywą przedstawia równanie  $16(x - 1)^2 - 9(y + 3)^2 = 144$ ? Podać współrzędne środka i ognisk, długości półosi oraz równania asymptot krzywej oraz narysować ją.

## Zestaw B

1. Rozwiązać równanie macierzowe  $\left( X + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ .
2. Wiadomo, że  $x_1 = 1 + i$  jest pierwiastkiem wielomianu  $x^4 - 6x^3 + 15x^2 - 18x + 10$ . Wyznaczyć pozostałe pierwiastki zespolone tego wielomianu.
3. Obliczyć odległość punktu  $Q = (-2, 0, 1)$  od płaszczyzny:  $\pi : \begin{cases} x = 2 & + t, \\ y = & s - 2t, \\ z = 1 - s \end{cases} \quad (s, t \in \mathbb{R})$ .
4. Korzystając ze wzorów Cramera wyznaczyć niewiadomą  $y$  z układu równań:  $\begin{cases} x - 2y + 3z = -5, \\ y - 2z = 5, \\ x + z = -1. \end{cases}$
5. Napisać wzór de Moivre'a i następnie obliczyć  $(i\sqrt{3} - \sqrt{3})^{18}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.

## Zestaw C

1. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć  $(i\sqrt{3} - 1)^{16}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.
2. Metodą bezwyznacznikową obliczyć macierz odwrotną do macierzy:  $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Sprawdzić wynik wykonując odpowiednie mnożenie.
3. Trójkąt o wierzchołkach  $A = (-1, 0, 4)$ ,  $B = (1, 2, 5)$ ,  $C = (0, 3, -1)$  przesunięto o wektor  $\mathbf{v} = (2, 3, -1)$ . Obliczyć objętość graniastosłupa pochyłego powstałego w czasie przesunięcia.
4. Wektory  $\mathbf{a}_1 = (1, 1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{a}_2 = (0, 1, 1, 0)$ ,  $\mathbf{a}_3 = (0, 0, 1, 1)$  uzupełnić do bazy przestrzeni  $\mathbb{R}^4$ .
5. Funkcję wymierną  $\frac{5x^3 + 3x + 4}{x^4 - 1}$  rozłożyć na ułamki proste.

## Zestaw D

1. Rozwiązać równanie  $(z - i)^3 + 1 = 0$ . Pierwiastki zapisać w postaci algebraicznej.
2. Wyznaczyć macierz  $X$  z równania  $\begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot X^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ .
3. Znaleźć obraz symetryczny punktu  $P = (1, -2, 0)$  względem prostej  $l : \begin{cases} x + y - z + 3 = 0, \\ 2x - y + 3z - 4 = 0. \end{cases}$
4. Narysować zbiór liczb zespolonych spełniających warunek:  $\left| \frac{z - 4 - i}{z + 2} \right| \geq 1$ .
5. W bazach standardowych wyznaczyć macierz przekształcenia liniowego  $L$ , które jest symetrią przestrzeni  $\mathbb{R}^3$  względem osi  $Oy$ .

## Egzamin poprawkowy

### Zestaw A

1. Funkcję wymierną  $\frac{6x^2 - 5x + 2}{x^4 - 2x^3 + x^2}$  rozłożyć na sumę rzeczywistych ułamków prostych.
2. Wyznaczyć macierz  $X$  z równania  $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot X^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ .
3. Znaleźć rzut prostopadły punktu  $P = (-1, 0, 3)$  na prostą  $l : \begin{cases} x + y = 3, \\ y - z = 2. \end{cases}$
4. Wyznaczyć jądro i obraz przekształcenia liniowego  $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  określonego wzorem  $L(x, y, z) = (x + y - z, 2x - y, 3y - 2z)$ .
5. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układ równań  $\begin{cases} 2x - y + 3z = -3, \\ x + y - z = 4, \\ -x + 3y + 2z = 3, \\ x + y + z = 2. \end{cases}$

### Zestaw B

1. Podać wzór do wyznaczania pierwiastków  $n$ -tego stopnia liczby zespolonej  $z$ . Następnie obliczyć  $\sqrt[3]{-8i}$ . Wynik podać w postaci algebraicznej.
2. Rozwiązać układ równań  $\begin{cases} x - 2y + 3z - 3t = -1, \\ 2x - 4y + 8z - 6t = 4. \end{cases}$
3. Znaleźć równanie prostej, która zawiera punkt  $A = (3, 0, -1)$  i przecina prostą  $l : x = 1 - t, y = 3 + 2t, z = 2 + t$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) pod kątem prostym.
4. Dane są punkty  $A = (1, 2, 3), B = (-1, 0, 6), C = (1, 3, -1), D = (2, p, 3)$ . Dla jakiego  $p$ , objętość czworościanu  $ABCD$  będzie równa 13?
5. Narysować zbiór liczb zespolonych, które spełniają nierówność  $|z^2 + 4z + 4| \geq |z + 2| |z - 3i|$ .

## Zestaw C

1. Narysować zbiór liczb zespolonych, które spełniają nierówność  $|(1-i)z - 2i| < |7-i|$ .
2. Funkcję wymierną  $\frac{x^5 - x^3 + x + 1}{x^3 + x}$  przedstawić jako sumę wielomianu i rzeczywistych ułamków prostych.
3. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt  $P = (1, 2, -3)$  i prostopadłej do prostej

$$l: \begin{cases} x + y - z = 2, \\ x + z = 0. \end{cases}$$

4. Obliczyć wysokość czworościanu o wierzchołkach  $A = (1, 0, -1)$ ,  $B = (2, 2, 2)$ ,  $C = (3, 4, 5)$ ,  $D = (-3, 4, -2)$  opuszczoną z wierzchołka  $D$ .

5. Rozwiązać równanie macierzowe  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \left( Y + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ .

## Zestaw D

1. Jednym z pierwiastków wielomianu  $W(x) = 2x^3 + 5x^2 + 6x + 2$  jest liczba wymierna. Znaleźć wszystkie pierwiastki zespolone tego wielomianu.

2. Rozwiązać równanie macierzowe  $X \cdot \begin{bmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ .

3. Podać interpretację pierwiastka  $n$ -tego stopnia liczby zespolonej  $z$  i obliczyć  $\sqrt[4]{8(\sqrt{3}i - 1)}$ . Wynik zapisać w postaci algebraicznej.
4. Trzy wierzchołki równoległoboku  $ABCD$  mają współrzędne:  $A = (1, 3, -1)$ ,  $B = (0, 3, 4)$ ,  $C = (2, -2, 5)$ . Znaleźć współrzędne czwartego wierzchołka i wysokość równoległoboku opuszczoną z wierzchołka  $C$ .

5. Rozwiązać układ równań  $\begin{cases} x - 2y + z - 3t = 2, \\ 2x + y - z - t = -3, \\ x - 7y + 2z - 8t = 1. \end{cases}$