

Analiza matematyczna 1 (2017/2018)

Opracowanie: dr Marian Gewert, doc. dr Zbigniew Skoczylas

Lista zdań* obejmuje cały materiał kursu i jest podzielona na 14 jednostek odpowiadających kolejnym wykładom. Na ćwiczeniach należy rozwiązać jeden lub dwa podpunkty z każdego zadania. Wyjątkiem są zadania oznaczone literą (P) oraz symbolem (*). Zadania oznaczone literą są proste i należy je rozwiązać samodzielnie. Z kolei zadania oznaczone gwiazdką są trudniejsze. Te nieobowiązkowe zadania kierujemy do ambitnych studentów. Na końcu listy zadań umieszczono zestawy zadań z I i II kolokwium oraz z egzaminu podstawowego i poprawkowego, a także z egzaminu na ocenę celującą.

Ambitnych studentów zachęcamy do przygotowania się w czasie semestru i następnie udziału w egzaminach na ocenę celującą z algebry i analizy. Zadania z egzaminów z ubiegłych lat można znaleźć na stronie internetowej

<http://wmat.pwr.edu.pl/studenci/kursy-ogolnouczeniiane/egzaminy-na-ocene-celujaca>

Lista pierwsza

1. Czy podane wypowiedzi są zdaniami w logice? Jeśli są, to podać ich wartość logiczną:

- (a) „Wrocław był stolicą Polski”; (b) „liczba 333333 jest podzielna przez 9”;
(c) „ $a^2 + b^2 = c^2$ ”; (d) „trójkąt o bokach 9, 9, 20 jest równoramienny”;
(e) „ $2^5 \geq 32$ ”; (f) „ $\Delta = b^2 - 4ac$ ”.

2. Napisać zaprzeczenia zdań:

- (a) „jem śniadanie i słucham »Trójki«”;
(b) „kwadrat nie jest pięciokątem”;
(c) „przez Poznań przepływa Odra lub Warta”;
(d) „jeśli funkcja f jest rosnąca, to funkcja $-f$ jest malejąca”;
(e) „liczba jest podzielna przez 6 wtedy i tylko wtedy, gdy jest podzielna przez 2 oraz przez 3”.

3. Ocenąć prawdziwość zdań złożonych:

- (a) „nieprawda, że funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca na \mathbb{R} ”;
(b) „ $(-1)^{44} = -1$ lub 2018 jest liczbą parzystą”;
(c) „funkcja $g(x) = \sin x + \cos(\pi/12)$ jest okresowa, a funkcja $f(x) = 3^x - 3^{-x}$ – nieparzysta”;
(d) „jeżeli Piotr jest ojcem Tadeusza, to Tadeusz jest starszy od Piotra”;
(e) „liczba 2016 jest podzielna przez 8 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba utworzona z końcowych trzech cyfr jest podzielna przez 8”.

*Zadania zaczerpnięto z książek: *Analiza matematyczna 1 (Definicje, twierdzenia, wzory; Przykłady i zadania; Kolokwia i egzaminy)*, *Wstęp do analizy i algebry* oraz *Algebra i analiza. Egzaminy na ocenę celującą*.

4. Używając tylko kwantyfikatorów, spójników logicznych oraz relacji $=$, \neq , $<$, \leq zapisać stwierdzenia:

(a) funkcja f nie jest rosnąca na przedziale $[a, b]$;

(b) $x \in [p, q]$;

(c) układ równań $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x + y = 10 \end{cases}$ nie ma rozwiązań;

(d) równanie $x^7 + 3x^5 + 1 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie rzeczywiste;

(e) liczba 2017 jest pierwsza.

5. Zbadać, czy podane formy zdaniowe z kwantyfikatorami są prawdziwe:

(a) $\bigvee_{x \in \mathbb{R}} x^x = 27$; (b) $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x^2 + 4x + 3 > 0$; (c) $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigvee_{y \in \mathbb{R}} x^2 + y^3 = 0$;

(d) $\bigvee_{y \in \mathbb{R}} \bigwedge_{x \in \mathbb{R}} xy = 0$; (e) $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \bigwedge_{y \in \mathbb{R}} (y \leq x) \vee (y > x)$; (f) $\bigvee_{x \in \mathbb{R}} \bigvee_{y \in \mathbb{R}} \sin x + \cos(x + y) = 0$.

6. Dla par zbiorów $A, B \subset \mathbb{R}$ wyznaczyć $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, A^c , B^c :

(a) $A = (0, 5)$, $B = [0, 7]$; (b) $A = (-\infty, 3)$, $B = [-1, \infty)$; (c) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$.

Wskazać te pary A, B , dla których $A \subset B$.

7. (P) Funkcje kwadratowe sprowadzić do postaci iloczynowej (jeżeli istnieje) i naszkicować ich wykresy:

(a) $f(x) = -x^2 + x$; (b) $f(x) = 2x^2 + 1$; (c) $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$;

(d) $f(x) = x^2 + 2x - 3$; (e) $f(x) = -2x^2 - 2x + \frac{3}{2}$; (f) $f(x) = -x^2 - 3x - \frac{9}{4}$.

Lista druga

8. Określić i narysować dziedziny naturalne funkcji:

(a) $f(x) = \frac{x}{x^2 - 2x - 3}$; (b) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{x^2 + 2}$; (c) $f(x) = \sqrt{16 - x^4}$; (d) $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{\sqrt{x+1}}$.

9. Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych przedziałach:

(a) $f(x) = 3 + 2x$, $(-\infty, \infty)$; (b) $f(x) = x^2$, $(-\infty, 0]$.

10. Niech f na przedziale będzie funkcją monotoniczną i dodatnią. Określić monotoniczność funkcji $1/f$. Korzystając z powyższego naszkicować wykresy podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

(a) $\frac{1}{1+x^4}$, $(-\infty, 0)$; (b) $\frac{-1}{1+2^x}$, $(-\infty, \infty)$; (c) $\frac{1}{2+\cos x}$, $(0, \pi)$; (d) $\frac{1}{\sqrt{x}-2}$, $(4, \infty)$.

11. Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych przedziałach:

(a) $f(x) = x^3$, $(-\infty, \infty)$; (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $(0, \infty)$.

12. Podać wzory funkcji złożonych $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$ oraz określić ich dziedziny naturalne:

(a) $f(x) = x - 1$, $g(x) = 3x + 2$; (b) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2$;
(c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4$; (d) $f(x) = |x|$, $g(x) = \sqrt{x+1}$.

13. Znaleźć funkcje odwrotne do funkcji:

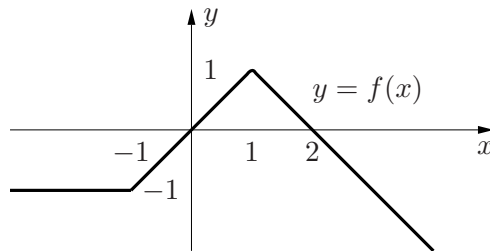
(a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$; (b) $f(x) = 3 - \sqrt{4-x^2}$, $(-2 \leq x \leq 0)$; (c) $f(x) = 2^{x-1}$;
(d) $f(x) = \log(x+2)$; (e) $f(x) = -x^4$, $(x \leq 0)$; (d) $f(x) = x^2 - 4x$, $(x \leq 2)$.

14. (P) Korzystając z własności logarytmów obliczyć:

- (a) $\log_6 3 + \log_6 12$; (b) $\log_3 18 - \log_3 2$; (c) $9 \log_6 \sqrt[3]{36}$;
(d) $3 \log_2 3 \cdot \log_3 4$; (e) $3 \log_4 \sqrt{3} - \frac{1}{2} \log_4 3 + 3 \log_4 2 - \log_4 6$; (f) $\frac{\log_2 54 - \log_2 6}{\log_2 27 - \log_2 9}$.

Lista trzecia

15. Na rysunku poniżej przedstawiono wykres funkcji $y = f(x)$.



Narysować wykresy funkcji:

- (a) $y = f(x) - 5$; (b) $y = f(x - 1)$; (c) $y = -f(x)$; (d) $y = f(-x)$;
(e) $y = f(x)/2$; (f) $y = f(3x)$; (g) $y = |f(x)|$; (h) $y = f(|x|)$.

16. Naszkicować wykresy funkcji:

- (a) $y = (x + 1)^4$; (b) $y = \sqrt{x - 2}$; (c) $y = \frac{1}{(x + 3)^2}$;
(d) $y = 2^{x+1}$; (e) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}$; (f) $y = 4^{|x|}$;
(g) $y = 5 + \log_2 x$; (h) $y = |\log 100x|$; (i) $y = \log_{\frac{1}{3}} \frac{|x|}{9}$.

17. (P) Korzystając z wykresu funkcji $y = \sin x$ naszkicować wykresy funkcji:

- (a) $y = \sin 3x$; (b) $y = \sin \frac{x}{2}$; (c) $y = \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
(d) $y = 1 + \sin x$; (e) $y = \frac{1}{2} \sin x - 1$; (f) $y = \sin 2 \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

18. Narysować wykresy funkcji:

- (a) $y = |\cos x|$; (b) $y = \sin x - \left|\frac{\sin x}{2}\right|$; (c) $y = |\operatorname{tg} x| \operatorname{ctg} x$.

19. Uzasadnić tożsamości trygonometryczne:

- (a) $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{tg} \alpha$; (b) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha$; (c) $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$;
(d) $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg}(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$; (e) $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(x/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(x/2)}$; (f) $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = \cos 2\alpha$.

Dla jakich kątów α są one prawdziwe?

20. Podane funkcje wyrazić za pomocą sinusa i cosinusa wielokrotności kąta α :

- (a) $\sin^2 \alpha$; (b) $\cos^2 \alpha$; (c) $\sin^4 \alpha$; (d) $\cos^4 \alpha$.

21. (P) Podaj wartości wyrażeń:

(a) $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{1}{2}$; (b) $\operatorname{arctg} 1 \cdot \operatorname{arctg} 1$; (c) $\frac{\arcsin(-\sqrt{3}/2)}{\arcsin 1}$; (d) $\operatorname{arctg} \sqrt{3} - \operatorname{arctg} \sqrt{3}$.

22. Wyznaczyć dziedzinę funkcji:

(a) $f(x) = \arcsin(2x + 1)$; (b) $f(x) = \arccos(x^2 + 3/4)$;
(c) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x+1}$; (d) $f(x) = \operatorname{arctg} 2^x$.

Lista czwarta

23. Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:

(a) $a_n = \frac{2 + \cos n}{3 - 2 \sin n}$; (b) $a_n = \sqrt[n]{2^n - 1}$; (c) $a_n = 1 - \sqrt{n}$;
(d) $a_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}$; (e*) $a_n = \frac{1}{4^1 + 1} + \frac{1}{4^2 + 2} + \dots + \frac{1}{4^n + n}$.

24. Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:

(a) $a_n = \frac{2n+1}{n+2}$; (b) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$; (c) $a_n = \frac{n!}{10^n}$;
(d) $a_n = \frac{1}{n^2 - 6n + 10}$; (e) $a_n = \frac{4^n}{2^n + 3^n}$; (f) $a_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$.

25. Korzystając z definicji granicy właściwej lub niewłaściwej ciągu uzasadnić równości:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-n}{n+4} = -1$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$; (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n = \infty$.

26. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów obliczyć granice:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{n+4}$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n^2+1}$; (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 1}{n - 3n^3}$;
(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+2)^{30}}{(n^3+1)^{20}}$; (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{2+4+\dots+2n}$; (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 4^n}{5^n - 4^{n+2}}$;
(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)n!+1}{(2n+1)(n+1)!}$; (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+2n})$; (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n\sqrt{n}+1}{\sqrt{n^3+1}}$.

27. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach obliczyć granice:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + (-1)^n}{3n + 2}$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor n\sqrt{12} \rfloor}{\lfloor n\sqrt{3} \rfloor}$; (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3 + \sin n}$;
(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3}}$; (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n + 2^n}{5^n + 4^n}}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \right)$.

28. Obliczyć granice z liczbą e :

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n-2}$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^{15n}$; (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{5-2n}$;
(d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{5n}\right)^n \left(\frac{5n+1}{2n}\right)^n$; (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n-1}\right)^n$; (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n$;
(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + \ln n}{\ln n}\right)^{\ln n^2}$; (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n - (n+2)^n}{(n+2)^n - (n+3)^n}$.

29. Korzystając z twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów obliczyć granice:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n}; \quad (b) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 3n^3 - 2n^2 - 1); \quad (c) \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2^n - 3^n);$$

$$(d) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 1} - n); \quad (e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (n + 1)!}{n! + 2}; \quad (f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} n}{\operatorname{arc} \operatorname{ctg} n}.$$

Lista piąta

30. Korzystając z definicji Heinego granicy właściwej lub niewłaściwej funkcji uzasadnić równości:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 3} (x - 2)^5 = 1; \quad (b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0; \quad (c) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x - 2} = \infty.$$

31. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji obliczyć:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x + 1}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 4x + 3}; \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x}}; \quad (d) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^4 - 16};$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x - 5)}; \quad (f) \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x - 2} - 2}{x - 6}; \quad (g) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x); \quad (h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x + 1}{3^x + 2};$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\operatorname{tg}^2 x + 5}; \quad (j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1 - \cos x}; \quad (k) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} + 2}{x + 1}; \quad (l) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} \right).$$

32. Zbadać, obliczając granice jednostronne, czy istnieją granice:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sgn} x; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}}; \quad (c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}; \quad (d) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}.$$

33. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnić równości:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos \frac{1}{x^2} = 0; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x} = 0; \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \sin x}{x^2} = 0.$$

34. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2}; \quad (b) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sin(x - 4)}{\sqrt{x} - 2}; \quad (c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \sin 2x}{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x};$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}; \quad (e) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}; \quad (f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{\sin 2x};$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x})}{x}; \quad (h) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\ln(x^2 - 3)}{x + 2}; \quad (i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\pi - x^e}{x - 1};$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{1}{x}}; \quad (k) \lim_{x \rightarrow 0} [1 + \operatorname{tg}(2x)]^{\operatorname{ctg} x}; \quad (l) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + x} - \sqrt[6]{1 - x}}{x};$$

35. Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne funkcji:

$$(a) f(x) = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}; \quad (b) f(x) = \frac{x^{11} + 1}{(x - 1)^{10}}; \quad (c) f(x) = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 9}};$$

$$(d) f(x) = \frac{x\sqrt{x} + 2}{x + 1}; \quad (e) f(x) = \frac{3^x}{3^x - 2^x}; \quad (f) f(x) = \frac{2x^2 + \sin x}{x};$$

$$(g) f(x) = \frac{\cos x}{e^x - 1}; \quad (h) f(x) = x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x; \quad (i) f(x) = \frac{\sin 2x}{\sin x - 1}.$$

Lista szósta

36. Dobrać parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe na \mathbb{R} :

$$(a) f(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ a + b \sin x & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi/2, \\ 1 & \text{dla } x > \pi/2; \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} \frac{a}{x} + 1 & \text{dla } x < -1, \\ b - 2x & \text{dla } x \geq -1; \end{cases} \quad (c) f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{dla } x < -1, \\ 2x & \text{dla } -1 \leq x \leq 0, \\ x^3 + bx & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

Naszkieować wykres funkcji z przykładu (a).

37. Wyznaczyć punkty nieciągłości podanych funkcji i określić ich rodzaj:

$$(a) f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x^2+x+2} & \text{dla } x \neq 1, 2 \\ 0 & \text{dla } x = 1, \\ 1 & \text{dla } x = 2; \end{cases} \quad (b) f(x) = \begin{cases} \arctg \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases}$$
$$(c) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(x^2) - \ln(x^2+1)} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0; \end{cases} \quad (d) f(x) = \begin{cases} 1 - \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

38. Uzasadnić, że podane równania mają jednoznaczne rozwiązania we wskazanych przedziałach:

$$(a) x^3 + 6x - 2 = 0, [0, 1]; \quad (b) x \sin x = 7, \left[2\pi, \frac{5\pi}{2}\right]; \quad (c) \ln(x+2) + x = 0, [-1, 0];$$
$$(d) (\sqrt{x} + 1)^7 = 2 - x, [0, 1]; \quad (e) 3^x + x = 3, [0, 1]; \quad (f) 2^x + 8^x = 11, [1, 2].$$

Wyznaczyć rozwiązania równania (a) 0.125.

(*) Dlaczego jedynym rozwiązaniem równania $x + \log_2 x + 3^x = 11$ jest $x = 2$?

39. Korzystając z definicji obliczyć pochodne funkcji:

$$(a) f(x) = x^3 \quad (x \in \mathbb{R}); \quad (b) f(x) = \frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0);$$
$$(c) f(x) = \sqrt{x} \quad (x > 0); \quad (d) f(x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Lista siódma

40. Badając pochodne jednostronne rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

$$(a) f(x) = |x^2 - x|, \quad x_0 = 1; \quad (b) f(x) = \sin x \cdot \operatorname{sgn}(x), \quad x_0 = 0; \quad (c) f(x) = \max\{x^2, 4\}, \quad x_0 = 2.$$

Naszkieować wykresy tych funkcji.

41. Zakładając, że funkcje f i g mają pochodne właściwe na pewnym przedziale, obliczyć pochodne funkcji:

$$(a) y = xf\left(\frac{1}{x}\right); \quad (b) y = \frac{f(x^2)}{x}; \quad (c) y = e^{-x}f(e^x);$$
$$(d) y = f(x) \cos g(x); \quad (e) y = \sqrt{f^2(x) - g^2(x)}; \quad (f) y = \arctg[f(x)g(x)];$$
$$(g) y = \ln \frac{f(x)}{g(x)}; \quad (h) y = \operatorname{tg} \frac{f(x)}{g(x)}; \quad (i) y = f(x)g\left(\frac{1}{x}\right).$$

42. Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodne funkcji:

- (a) $3 \cos x + \operatorname{tg} x$; (b) $e^x (x^2 - 3x + 1)$; (c) $\frac{x^2 + 1}{x - 1}$; (d) $e^{-x} (5x + 1)^2$;
 (e) $\ln(x^4 + 1) \operatorname{tg} \sqrt{x}$; (f) $e^{1/x} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(4 - x)$; (g) $\ln(\sin^2 x + 1)$; (h) $\sqrt{\operatorname{arc} \sin x^2}$;
 (i) $\frac{4}{(x^2 + 1)^3}$; (j) $\frac{2 \sin^2 x}{3 \cos^2 x}$; (k) $(e^{2x} + 1)^5$; (l) $(\sin x)^x$ ($0 < x < \pi$);
 (m) $(\operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos x)^2$; (n) $\ln(2x) + \ln \frac{3}{x}$; (o) $\frac{\ln 2017}{x^2 + 1}$; (p) $e^5 \sin 2x + \sqrt{\pi} \cos 3x$.

43.* Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć $(f^{-1})'(y_0)$, jeżeli:

- (a) $f(x) = x + \ln x$, $y_0 = e + 1$; (b) $f(x) = \cos x - 3x$, $y_0 = 1$;
 (c) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x}$, $y_0 = 3$; (d) $f(x) = x^3 + 3^x$, $y_0 = 4$.

44. (P) Napisać równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

- (a) $f(x) = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{2}$, $(1, f(1))$; (b) $f(x) = \ln(x^2 + e)$, $(0, f(0))$; (c) $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$, $(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$;
 (d) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$, $(3, f(3))$; (e) $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$, $(\sqrt{2}, f(\sqrt{2}))$; (f) $f(x) = e^{1 + \frac{1}{x}}$, $(x_0, 1)$.

45. (a) Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^4 - 2x + 5$, która jest równoległa do prostej $y = 2x + 3$.

(b) Wyznaczyć styczną do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, która tworzy kąt $\frac{\pi}{4}$ z osią Ox .

(c) Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x \ln x$, która jest prostopadła do prostej $2x + 6y - 1 = 0$.

(d) Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{x}$, w punkcie jego przecięcia z prostą $\pi x = 4y$.

(e) Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$ w punkcie jego przecięcia z osią Oy .

46.* (a) Fragment terenu ma kształt trójkąta równoramiennego o boku $b = 200$ m. Kąt przy wierzchołku tego trójkąta, zmierzony z dokładnością 0.01 rad wynosi $\pi/3$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole tego terenu?

(b) Objętość kulki metalowej, wyznaczona z dokładnością 1 cm³, wynosi 36π cm³. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć średnicę tej kulki?

(c) Do szybu puszczone swobodnie kamień i zmierzono czas jego spadania z dokładnością 0.1 s. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można wyznaczyć głębokość sztolni, jeżeli czas spadania kamienia wyniósł 4.1 s? Przyjąć $g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

(d) W biegu na 100 m czas mierzy się z dokładnością 0.01 s. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć średnią prędkość zawodniczki, jeśli uzyskała ona czas 12.50 s?

47. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granice:

- (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^x + 1)}{x}$; (b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \sin \frac{\pi}{2} x}{\ln x}$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{x^2}$;
 (d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 10x + 9}{x^5 - 5x + 4}$; (e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 3x}$; (f) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$;
 (g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$; (h) $\lim_{x \rightarrow \pi^-} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; (i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{1}{x^2} \right)$;
 (j) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right)$; (k) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1 - x} \right)$; (l) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x)^x$;

$$(m) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} x \right)^x;$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x};$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}.$$

Lista ósma

48. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji:

$$(a) f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x;$$

$$(b) f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2;$$

$$(c) f(x) = 4x + \frac{1}{x};$$

$$(d) f(x) = \frac{x^3}{3-x^2};$$

$$(e) f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x};$$

$$(f) f(x) = xe^{-3x};$$

$$(g) f(x) = x \ln^2 x;$$

$$(h) f(x) = \frac{x}{\ln x};$$

$$(i) f(x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

49. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji:

$$(a) f(x) = x^3 - 4x^2;$$

$$(b) f(x) = x + \frac{1}{x};$$

$$(c) f(x) = \frac{2^x}{x};$$

$$(d) f(x) = (x+1)e^{-x};$$

$$(e) f(x) = \frac{x+1}{x^2+1};$$

$$(f) f(x) = |x^2 - 5x - 6|;$$

$$(g) f(x) = x \ln x;$$

$$(h) f(x) = \sqrt{3x-x^3};$$

$$(i) f(x) = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - \ln(1+x^2).$$

50. Znaleźć wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach w ich dziedzinach naturalnych:

$$(a) f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x, [1, 5];$$

$$(b) f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}, [-2, 2];$$

$$(c) f(x) = \sqrt{1+x} - \sqrt{9-x};$$

$$(d) f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}, [-1, 4];$$

$$(e) f(x) = 1 - |9-x^2|, [-5, 1];$$

$$(f) f(x) = \sin^3 x - 6 \sin x, [-\pi/2, \pi/2];$$

$$(g) f(x) = \sqrt{3+2x-x^2};$$

$$(h) f(x) = \operatorname{arc} \sin x + \operatorname{arc} \cos(1-x).$$

51. (P) Obliczyć f' , f'' funkcji:

$$(a) f(x) = 4x^7 - 5x^3 + 2x;$$

$$(b) f(x) = x^3 - \frac{2}{x};$$

$$(c) f(x) = \frac{e^x}{x};$$

$$(d) f(x) = \operatorname{arc} \operatorname{tg} x;$$

$$(e) f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x;$$

$$(f) f(x) = x^3 \ln x.$$

52. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji:

$$(a) f(x) = x(x-1)(x-3);$$

$$(b) f(x) = xe^{-x};$$

$$(c) f(x) = \frac{x^3}{x^2+12};$$

$$(d) f(x) = \ln(1+x^2);$$

$$(e) f(x) = \frac{1}{1-x^2};$$

$$(f) f(x) = x - \frac{2}{3}x^3 - 4 \ln|x|;$$

$$(g) f(x) = \sin x + \frac{1}{8} \sin 2x;$$

$$(h) f(x) = e^{\operatorname{arc} \operatorname{tg} x};$$

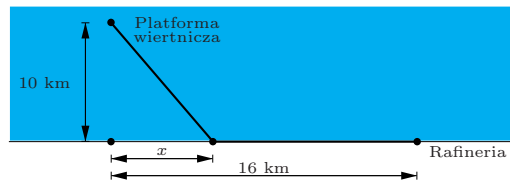
$$(i) f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Lista dziewiąta

53. Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji i następnie sporządzić ich wykresy:

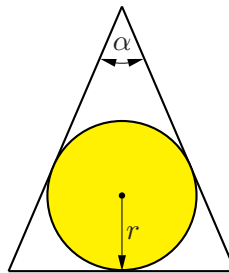
- (a) $f(x) = (x - 1)^2(x + 2)$; (b) $f(x) = \frac{x^3}{x - 1}$; (c) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x - 1}$;
 (d) $f(x) = 3 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}$; (e) $f(x) = x\sqrt{1 - x^2}$; (f) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$;
 (g) $f(x) = xe^{2x}$; (h*) $f(x) = \sin x + \sin 3x$; (i) $f(x) = x^2 \ln x$.

54. Platforma wiertnicza jest zakotwiczona na morzu 10 km od prostoliniowego brzegu. Ropa z platformy będzie dostarczana rurociągiem do rafinerii położonej nad brzegiem morza, 16 km od punktu brzegu najbliższego platformie. Koszt ułożenia 1 km rurociągu na dnie morza wynosi 200 000 euro, a na lądzie – 100 000 euro. Do którego miejsca na brzegu należy doprowadzić rurociąg, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

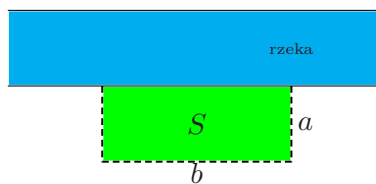


55. Prostopadłościenny kontener ma mieć pojemność 22.50 m^3 i kwadratową podłogę. Koszt 1 m^2 blachy potrzebnej do wykonania podłogi i pokrywy wynosi 20 zł, a ścian bocznych – 30 zł. Jakie powinny być wymiary kontenera, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

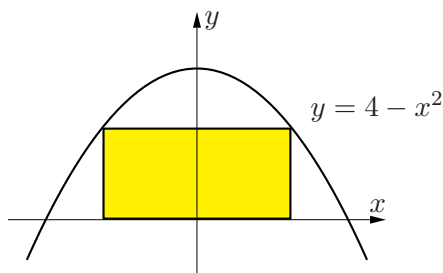
56. Jaki powinien być kąt α przy wierzchołku trójkąta równoramiennego o danym polu, aby promień koła r wpisanego w ten trójkąt był największy?



57. Jakie powinny być wymiary a , b prostokątnego pola o powierzchni S , którego naturalnym bokiem jest prostoliniowy brzeg rzeki, aby na jego ogrodzenie zużyć jak najmniej siatki?



58. W parabolę o równaniu $y = 4 - x^2$ wpisano prostokąt, w sposób przedstawiony na rysunku. Znaleźć wymiary prostokąta, który ma największe pole.



Lista dziesiąta

59. Napisać wzory Taylora z resztą Lagrange'a dla podanych funkcji f , punktów x_0 oraz n :

(a) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$, $n = 4$; (b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$, $n = 2$;

(c) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \pi$, $n = 3$; (d) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$, $n = 5$.

60. Napisać wzory Maclaurina z n -tą resztą Lagrange'a dla funkcji:

(a) $f(x) = \sin \frac{x}{3}$; (b) $f(x) = \cosh x$; (c) $f(x) = \cos x$; (d) $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

61. Oszacować dokładności podanych wzorów przybliżonych na wskazanych przedziałach:

(a) $\operatorname{tg} x \approx x$, $|x| \leq \frac{\pi}{12}$; (b) $\cos^2 x \approx 1 - x^2$, $|x| \leq 0.1$;

(c) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, $|x| \leq 0.25$; (d) $\ln(1-x) \approx -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$, $|x| < 0.1$.

62. Stosując wzór Maclaurina obliczyć:

(a) $\frac{1}{e}$ z dokładnością 10^{-3} ; (b) $\sqrt[3]{0.997}$ z dokładnością 10^{-3} ;

(c) $\ln 1.1$ z dokładnością 10^{-4} ; (d) $\sin 0.1$ z dokładnością 10^{-5} .

Lista jedenasta

63. Przyjmując w definicji całki oznaczonej podział równomierny obliczyć:

(a) $\int_{-2}^1 (2x - 1) dx$; (b) $\int_2^3 x^2 dx$.

Wskazówka. Zastosować odpowiednio wzory

$$(a) \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (b) \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

64. Korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza obliczyć całki:

(a) $\int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$; (b) $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx$; (c) $\int_0^9 \frac{dx}{x^2+1}$;

(d) $\int_{-1}^2 x(1+x^3) dx$; (e) $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) dx$; (f) $\int_0^{\pi/3} \operatorname{tg}^2 x dx$.

65. Korzystając z definicji całki oznaczonej oraz faktu, że funkcje ciągłe są całkowalne uzasadnić równości:

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}$; (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \left(\cos \frac{\pi}{2n} + \cos \frac{2\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{n\pi}{2n} \right) \right] = \frac{2}{\pi}$;

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n\sqrt{n}} \left(\sqrt{1+n} + \sqrt{2+n} + \dots + \sqrt{n+n} \right) \right] = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1)$.

66. Obliczyć podane całki nieoznaczone:

$$(a) \int \left(x^3 + \frac{4}{x} - 3\sqrt{x} \right) dx; \quad (b) \int \frac{(1-x) dx}{1+\sqrt{x}}; \quad (c) \int \frac{x^4 dx}{x^2+1};$$
$$(d) \int \frac{\cos 2x dx}{\cos x - \sin x}; \quad (e) \int \frac{x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}} dx; \quad (f) \int e^{-x} \cdot 3^{2x} dx.$$

67.* Znaleźć wielomian najniższego stopnia, który:

(a) w punkcie $x = 1$ ma minimum lokalne właściwe, a w punkcie $x = 3$ maksimum lokalne, a ponadto w punkcie $x = 0$ przyjmuje wartość 2;

(b) dla $x = 2$ ma punkt przegięcia wykresu, przy czym wartość wielomianu i jego pochodna są w tym punkcie równe odpowiednio 1 i 2.

68. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

$$(a) y = 2x - x^2, x + y = 0; \quad (b) y = x^2, y = \frac{1}{2}x^2, y = 3x; \quad (c) y = \frac{1}{x^2}, y = x, y = 4;$$
$$(d) y = 1, y = \frac{4}{x^2+1}; \quad (e) y = 2^x, y = 2, x = 0; \quad (f) y = x + \sin x, y = x, (0 \leq x \leq 2\pi);$$
$$(g) y = x^2, x = y^2; \quad (h) yx^4 = 1, y = 1, y = 16; \quad (i) y^2 = -x, y = x - 6, y = -1, y = 4.$$

Lista dwunasta

69. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć całki nieoznaczone:

$$(a) \int x e^{-3x} dx; \quad (b) \int (x+1)^2 e^x dx; \quad (c) \int \sqrt{x} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} dx; \quad (d) \int \frac{x dx}{\cos^2 x};$$
$$(e) \int x^2 \sin x dx; \quad (f) \int \frac{\operatorname{arc\,cos} x dx}{\sqrt{x+1}}; \quad (g) \int \ln(x+1) dx; \quad (h) \int \operatorname{arc\,cos} x dx;$$
$$(i) \int e^{2x} \sin x dx; \quad (j) \int \sin x \sin 3x dx; \quad (k) \int \sin 3x \cos x dx; \quad (l) \int \cos x \cos 5x dx;$$
$$(m) \int \sin^2 x dx; \quad (n) \int \cos^4 x dx; \quad (o) \int \ln(1+x^2) dx; \quad (p^*) \int x \sin x e^x dx.$$

70. Metodą całkowania przez części obliczyć całki oznaczone:

$$(a) \int_{-1}^1 x e^{-x} dx; \quad (b) \int_0^1 x^2 e^{2x} dx; \quad (c) \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln x}{x^2} dx;$$
$$(d) \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx; \quad (e) \int_0^{\pi} x(1 + \cos x) dx; \quad (f) \int_0^1 \operatorname{arc\,sin} x dx.$$

71. Stosując odpowiednie podstawienia obliczyć całki nieoznaczone:

$$(a) \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx; \quad (b) \int \frac{\sqrt{1+4x}}{x} dx; \quad (c) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x}}; \quad (d) \int x \sin(x^2+4) dx;$$
$$(e) \int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}; \quad (f) \int (5-3x)^{10} dx; \quad (g) \int x^2 \sqrt[5]{5x^3+1} dx; \quad (h) \int \frac{dx}{2+\sqrt{x}};$$
$$(i) \int \frac{\ln x}{x} dx; \quad (j) \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1}; \quad (k) \int \frac{5 \sin x dx}{3-2 \cos x}; \quad (l) \int x^3 e^{x^2} dx.$$

72. Obliczyć całki oznaczone dokonując wskazanych podstawień:

(a) $\int_0^{\pi} \sin x e^{\cos x} dx, \cos x = t;$ (b) $\int_1^3 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}, 1+x = t;$
(c) $\int_0^1 x\sqrt{1+x} dx, \sqrt{1+x} = t;$ (d) $\int_1^e \ln x dx, \ln x = t;$
(e) $\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, x = t^2;$ (f) $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx, x = 3 \sin t;$ (g) $\int_0^{\frac{1}{2} \ln 3} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}, e^x = t.$

73. (P) Obliczyć całki z ułamków prostych pierwszego rodzaju:

(a) $\int \frac{dx}{(x-3)^7};$ (b) $\int \frac{dx}{x+5};$ (c) $\int \frac{5 dx}{(2-7x)^3};$ (d) $\int \frac{8 dx}{9x+20}.$

Lista trzynasta

74. Obliczyć całki z ułamków prostych drugiego rodzaju:

(a) $\int \frac{dx}{x^2+4x+29};$ (b) $\int \frac{(6x+3) dx}{x^2+x+4};$ (c) $\int \frac{(4x+2) dx}{x^2-10x+29};$ (d) $\int \frac{(x-1) dx}{9x^2+6x+2}.$

75. Obliczyć całki z funkcji wymiernych:

(a) $\int \frac{(x+2) dx}{x(x-2)};$ (b) $\int \frac{x^2 dx}{x+1};$ (c) $\int \frac{dx}{(x-1)x^2};$ (d) $\int \frac{x^4 dx}{x^2-9};$
(e) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)};$ (f) $\int \frac{(4x+1) dx}{2x^2+x+1};$ (g) $\int \frac{2 dx}{x^2+6x+18};$ (h) $\int \frac{dx}{x(x^2-4)};$
(i) $\int \frac{(5-4x) dx}{x^2-4x+20};$ (j) $\int \frac{x^2 dx}{x^2+2x+5};$ (k) $\int \frac{dx}{x(x^2+4)};$ (l) $\int \frac{x dx}{x^4-1}.$

76. Obliczyć całki z funkcji trygonometrycznych:

(a) $\int \sin^3 x dx;$ (b) $\int \sin^4 x \cos^3 x dx;$ (c) $\int \cos^4 x dx;$
(d) $\int \sin^3 x \cos^6 x dx;$ (e) $\int \cos^2 x \cos 2x dx;$ (f*) $\int \sin^2 2x \sin^2 x dx.$

77. Obliczyć całki z funkcji trygonometrycznych:

(a) $\int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x};$ (b) $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos x} dx;$ (c) $\int \frac{dx}{1 + 2 \cos^2 x};$
(d) $\int \frac{\sin^2 x dx}{1 + \cos x};$ (e) $\int \frac{dx}{1 - \operatorname{tg} x};$ (f) $\int \frac{\sin^5 x dx}{\cos^3 x};$
(g) $\int \frac{dx}{\cos x};$ (h) $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x};$ (i) $\int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5}.$

Lista czternasta

78. Obliczyć pola obszarów ograniczonych krzywymi:

- (a) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$, $x = 0$, $y = 0$; (b) $4y = x^2$, $y = \frac{8}{x^2 + 4}$; (c) $y = \ln x$, $x = e$, $y = -1$;
(d) $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ ($0 < x < \pi/2$); (e) $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = 1$, $y = 2$; (f) $y = 2^x$, $y = 4^x$, $y = 16$.

79. Obliczyć długości krzywych:

- (a) $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $2 \leq x \leq 3$; (b) $y = x^2$, $0 \leq x \leq 1$; (c) $y = 2\sqrt{x^3}$, $0 \leq x \leq 11$;
(e) $y = e^x$, $\frac{1}{2} \ln 2 \leq x \leq \frac{1}{2} \ln 3$; (g) $y = \frac{x^5}{10} + \frac{1}{6x^3}$, $1 \leq x \leq 2$; (h) $y = 1 - \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$.

80. Obliczyć objętości brył powstałych z obrotu figur T wokół wskazanych osi:

- (a) $T: 0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2x - x^2$, Ox ; (b) $T: 0 \leq x \leq \sqrt{5}$, $0 \leq y \leq \frac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}$, Oy ;
(c) $T: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$, $0 \leq y \leq \operatorname{tg} x$, Ox ; (d) $T: 0 \leq x \leq 1$, $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$, Oy ;
(e) $T: 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x^3$, Oy ; (f) $T: 1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq \frac{1}{x}$, Oy ;
(g) $T: 1 \leq x \leq 4$, $\frac{4}{x} \leq y \leq 5 - x$, Ox ; (h) $T: 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \sin x + \cos x$, Ox ;
(i) $T: 0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq \sin x$, $y = 2$; (j) $T: 0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq x - x^2$, $x = 2$.

81. Obliczyć pola powierzchni powstałych z obrotu wykresów funkcji f wokół wskazanych osi:

- (a) $f(x) = \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, Ox ; (b) $f(x) = \sqrt{4 + x}$, $-4 \leq x \leq 2$, Ox ;
(c) $f(x) = \ln x$, $1 \leq x \leq \sqrt{3}$, Oy ; (d) $f(x) = |x - 1| + 1$, $0 \leq x \leq 2$, Oy ;
(e) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $-1 \leq x \leq 1$, Ox ; (f) $f(x) = \sqrt{x} \left(1 - \frac{x}{3}\right)$, $1 \leq x \leq 3$, Ox ;
(g) $f(x) = \frac{x - 1}{9}$, $1 \leq x \leq 10$, Oy ; (h) $f(x) = \frac{x^2}{2}$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$, Oy .

82. (a) Siła rozciągania sprężyny jest wprost proporcjonalna do jej wydłużenia (współczynnik proporcjonalności wynosi k). Obliczyć pracę jaką należy wykonać, aby sprężynę o długości l rozciągnąć do długości L .

(b) Zbiornik ma kształt walca o osi poziomej. Średnica walca $D = 2$ m, a długość $L = 6$ m. Obliczyć pracę, jaką trzeba wykonać, aby opróżnić wypełniony całkowicie wodą zbiornik. Otwór do opróżnienia zbiornika znajduje się w jego górnej części. Masa właściwa wody $\gamma = 1000$ kg/m³.

83. (a) Punkt materialny zaczął poruszać się prostoliniowo z prędkością początkową $v_0 = 10$ m/s i przyspieszeniem $a_0 = 2$ m/s². Po czasie $t_1 = 10$ s punkt ten zaczął poruszać się z opóźnieniem $a_1 = -1$ m/s². Znaleźć położenie punktu po czasie $t_2 = 20$ s od chwili rozpoczęcia ruchu.

(b) Dwie cząstki elementarne położone w odległości $d = 36$ zaczynają zbliżać się do siebie z prędkościami odpowiednio $v_1(t) = 10t + t^3$, $v_2(t) = 6t$, gdzie $t \geq 0$. Po jakim czasie nastąpi zderzenie tych cząstek?

Przykładowe zestawy zadań z kolokwiów i egzaminów

W rozwiązaniach zadań należy opisać rozumowanie prowadzące do wyniku, uzasadnić wyciągnięte wnioski, sformułować wykorzystane definicje, zacytować potrzebne twierdzenia (podać założenia i tezę), napisać zastosowane wzory ogólne (z wyjaśnieniem oznaczeń). Ponadto, jeśli jest to konieczne, należy sporządzić czytelny rysunek z pełnym opisem. Skreślone fragmenty pracy nie będą sprawdzane.

I kolokwium

Zestaw A

1. Wyznaczyć wszystkie asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{5^x}{5^x - 25}$.
2. Sformułować twierdzenie o trzech ciągach i następnie obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^{n+1} + 2^{2n+1}}$.
3. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{x}$ w punkcie $x_0 = \sqrt{3}$.
4. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x^2 - 4)}{x^2 - 3x + 2}$.

Zestaw B

1. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^4 + n^3 + 1} - n^2)$.
2. Wyznaczyć dziedzinę naturalną funkcji $f(x) = e^{\sqrt{2x-x^2}}$. Następnie obliczyć jej pochodną.
3. Sformułować twierdzenie Bolzano i uzasadnić, że równanie $2^x + x = 5$ ma tylko jedno rozwiązanie.
4. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow \infty} [x(\ln(1+x) - \ln x)]$.

Zestaw C

1. Dobrać parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} x+a & \text{dla } x \leq 0, \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{dla } 0 < x \leq 1, \\ bx^2 - 2 & \text{dla } 1 < x \end{cases}$ była ciągła na \mathbb{R} .
2. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{12n-5}$.
3. Znaleźć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = xe^{-x}$, która jest równoległa do prostej $y = e^2$.
4. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(x^2 - 8)}{x - 3}$.

Zestaw D

1. Znaleźć dziedzinę naturalną funkcji $f(x) = \operatorname{arc\,sin}(x^2 - 3)$ i obliczyć $f'(x)$.
2. Sformułować twierdzenie o trzech ciągach i zastosować je do obliczenia granicy $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 + 2n^2 + 3}$.
3. Znaleźć wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \frac{2x^4 - x^3}{x^3 + x}$.
4. Napisać równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = e^{x^3-1}$ w punkcie (x_0, e^7) .

II kolokwium

Zestaw A

1. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arc\,tg} x}{x^2}$.
2. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \frac{x}{x^2 - x + 1}$ na przedziale $[0, 2]$.
3. Całkując przez części obliczyć całkę oznaczoną $\int_0^{2\pi} x \cos \frac{x}{2} dx$.
4. Obliczyć objętość bryły powstałej z obrotu wokół osi Ox figury ograniczonej krzywą $y = \sin x$ i prostą $y = 2x/\pi$ ($0 \leq x \leq \pi/2$).

Zestaw B

1. Wyznaczyć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = 1/x + \ln x$.
2. Podać wymiary prostokątnej działki wytyczonej z obszaru w kształcie półkola o promieniu R tak, aby miała ona największe pole.
3. Przez podstawienie $x = t^2$ ($t \geq 0$) obliczyć całkę $\int \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} dx$. Następnie wyznaczyć funkcję pierwotną F funkcji podcałkowej spełniającą warunek $F(1) = 2/3$.
4. Obliczyć całkę nieoznaczoną funkcji $f(x) = \sin^4 x$.

Zestaw C

1. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $g(x) = \operatorname{arc\,tg} x - x - x^3/3$.
2. Oszacować dokładność wzoru przybliżonego $\frac{1}{\sqrt{x+1}} \approx 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2$ dla $|x| \leq 0.1$.
3. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi $y = \sqrt{x}$, $y = 2 - x^2$ i prostą $x = 0$. Sporządzić rysunek.
4. Obliczyć całkę nieoznaczoną funkcji $f(x) = 1/(x^3 + 4x)$. Sprawdzić otrzymany wynik.

Zestaw D

1. Wyznaczyć przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia wykresu funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.
2. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} + e^{-3x} - 2}{x^2}$.
3. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego krzywymi: $y^2 = x$, $x + y = 2$. Sporządzić rysunek.
4. Całkując przez części obliczyć całkę nieoznaczoną $\int x \operatorname{arc\,ctg} x dx$.

Egzamin podstawowy

Zestaw A

1. Obliczyć pole obszaru D ograniczonego przez krzywe: $y = \ln x$, $x = e^2$, $y = -1$. Sporządzić rysunek.

2. Metodą podstawiania obliczyć całkę $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x+1}$.
3. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+9} - n}{\sqrt{n^2+4} - n}$.
4. W przedziale $[-3, 4]$ wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x\sqrt{25-x^2}$.
5. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\sin \pi x}$.
6. Dobrać parametry p, q tak, aby funkcja $f(x) = \begin{cases} e^x + x & \text{dla } x \leq 0, \\ x^2 + px + q & \text{dla } 0 < x \end{cases}$ miała pochodną w punkcie $x_0 = 0$. Narysować wykres otrzymanej funkcji.

Zestaw B

1. Znaleźć asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{(x-2)\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}$.
2. Obliczyć całkę $\int \frac{(4x+6) dx}{x^2+4x+13}$.
3. Wyznaczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x^5)}{\sin(2x^2)\sin(3x^3)}$.
4. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą z obrotu wykresu funkcji $f(x) = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) wokół osi Ox .
5. Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^3 \ln x$.
6. Wyznaczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+2)(n+1)!}{n^2(n!+4)}$.

Zestaw C

1. Obliczyć całkę $\int x^2 \sin x dx$.
2. Znaleźć ekstrema funkcji $f(x) = (x-3)e^x$.
3. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez krzywe: $y = 3x^2 - 6x$, $y = 6 + 3x - 3x^2$. Sporządzić rysunek.
4. Wyznaczyć równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$, która jest prostopadła do prostej $x + 2y - 3 = 0$.
5. Obliczyć granicę ciągu $x_n = \sqrt{n^2+5n+2} - \sqrt{n^2+3n+1}$.
6. Korzystając z reguły de L'Hospitala obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x)^x$.

Zestaw D

1. Obliczyć pole obszaru ograniczonego przez wykres funkcji $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) oraz prostą $y = 1/2$. Sporządzić rysunek.
2. Wyznaczyć przedziały wypukłości i punkty przegięcia wykresu funkcji $f(x) = (2-x)e^{2x}$.
3. Obliczyć całkę $\int \frac{x^2 dx}{x^2 - 6x + 25}$.

4. Pokazać, że równanie $x + \ln x - 2 = 0$ ma tylko jedno rozwiązanie.

5. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2^n + 1)(3^{n+1} + 2)}{6^n + 5}$.

6. Wyznaczyć wszystkie asymptoty wykresu funkcji $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 - 1}}{\sqrt{x - 1}}$.

Egzamin poprawkowy

Zestaw A

1. Obliczyć granicę ciągu $a_n = n(n - \sqrt{n^2 - 1})$.

2. Wyznaczyć dziedzinę naturalną, asymptoty i naszkicować wykres funkcji $f(x) = \frac{x(x - 1)}{x - 2}$.

3. Wyznaczyć przedział, na którym funkcja $f(x) = (x^2 + 2x - 1)e^{-x}$ jest jednocześnie rosnąca i wypukła.

4. Obliczyć pole obszaru ograniczonego osiami układu współrzędnych, wykresem paraboli $y = x^2 + 3$ i styczną do niej w punkcie o odciętej $x_0 = 3$. Sporządzić rysunek.

5. Ile materiału stracimy wycinając z blachy w kształcie półkola o promieniu R prostokąt o największym polu?

6. Podstawiając $\arctg x = t$, a następnie całkując przez części, obliczyć całkę $\int \frac{\ln(2 \arctg x) dx}{1 + x^2}$. Sprawdzić poprawność otrzymanego wyniku.

Zestaw B

1. Obliczyć całkę z funkcji wymiernej $\frac{x^2 + x + 4}{x^3 + 4x}$. Sprawdzić otrzymany wynik.

2. Wyznaczyć asymptoty pionowe i ukośne wykresu funkcji $f(x) = \frac{2x^2 + 2x + 1}{2x - 1}$ oraz starannie go naszkicować.

3. Wyznaczyć przedział (jeżeli istnieje), na którym funkcja $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ jest jednocześnie rosnąca i wypukła.

4. Obliczyć granicę ciągu $x_n = \frac{1}{2^n(\sqrt{2^{2n} + 1} - 2^n)}$.

5. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} 2x \ln x$.

6. Obliczyć pole obszaru ograniczonego wykresami funkcji: $y = 0$, $y = \ln x$, $y = \ln(1 - x)$.

Zestaw C

1. Wyznaczyć dziedzinę naturalną, asymptoty i naszkicować wykres funkcji $f(x) = \frac{x(x + 1)}{x + 2}$.

2. Obliczyć granicę ciągu $a_n = \sqrt{n(n + 1)} - n$.

3. Wyznaczyć przedział, na którym funkcja $f(x) = (x^2 - 6x + 2)e^x$ jest jednocześnie malejąca i wklęsła.

4. Narysować i obliczyć pole obszaru ograniczonego osią Ox , wykresem funkcji $y = x^3$ i styczną do niego w punkcie o odciętej $x_0 = 3$.
5. Z kawałków blachy w kształcie koła o promieniu R wycinamy prostokątne podkładki. Wyznaczyć ich wymiary tak, aby odpady były najmniejsze.
6. Podstawiając $\sin x = t$, a następnie całkując przez części, obliczyć całkę $\int \sin x \cos x \operatorname{arc\,tg} \sin x \, dx$. Sprawdzić poprawność otrzymanego wyniku.

Zestaw D

1. Obliczyć granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(\operatorname{tg} x)$.
2. Wyznaczyć asymptoty pionowe i ukośne wykresu funkcji $g(x) = \frac{3x^2 + 4x - 5}{2 - 3x}$ oraz starannie go naszkicować.
3. Obliczyć granicę ciągu $y_n = 3n \left(\sqrt{4n^2 - 1} - 2n \right)$.
4. Wyznaczyć przedział (jeżeli istnieje), na którym funkcja $g(x) = \frac{x^3}{3} + \operatorname{arc\,ctg} \frac{1}{x}$ jest jednocześnie rosnąca i wklęsła.
5. Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi: $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.
6. Obliczyć całkę z funkcji wymiernej $\frac{6x}{4 - 9x^2}$. Sprawdzić otrzymany wynik.

Egzamin na ocenę celującą (luty 2016 r.)

1. Pokazać, że dla pewnej liczby naturalnej n rozwinięcie dziesiętne \sqrt{n} zaczyna się układem cyfr 2016, a bezpośrednio po przecinku ma 7 „siódemek”. Pozostałe cyfry rozwinięcia mogą być dowolne.
2. Jakie wartości może przyjąć granica $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x^2)}{f(x)}$, gdy f jest funkcją ciągłą na przedziale $[0, 1)$ i dodatnią na $(0, 1)$?
3. Znaleźć wielomian, który tylko w -1 i 2 ma ekstrema lokalne właściwe (odpowiednio minimum i maksimum), a ponadto tylko w 0 ma punkt przegięcia.
4. Niech funkcja f będzie ciągła i nieujemna na przedziale $[a, b]$ ($a \geq 0$). Wyprowadzić wzór na objętość bryły powstałej z obrotu obszaru $\{(x, y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$ wokół osi Oy . Korzystając z niego obliczyć objętość torusa, tj. bryły powstałej z obrotu koła o promieniu r wokół osi oddalonej o R ($R > r$) od jego środka.

