Politechnika Wrocławska

Prawdopodobieństwo inaczej

Dni Matematyki 2024

Andrzej Giniewicz

Historia prawdopodobieństwa

Przed Pascalem i Fermatem

Trzy poziomy wnioskowania probabilistycznego:

1. nieświadome wnioskowanie w świetle niepewności,
2. wnioskowanie oparte na języku naturalnym i doświadczeniu,
3. wnioskowanie oparte na matematyce.

Przed Pascalem i Fermatem

Trzy poziomy wnioskowania probabilistycznego:

1. nieświadome wnioskowanie w świetle niepewności,
2. wnioskowanie oparte na języku naturalnym i doświadczeniu,
3. wnioskowanie oparte na matematyce.

Wczesne wzmianki i zastosowania matematyki do analizy prawdopodobieństwa:

- kryptografia arabska

Przed Pascalem i Fermatem

Trzy poziomy wnioskowania probabilistycznego:

1. nieświadome wnioskowanie w świetle niepewności,
2. wnioskowanie oparte na języku naturalnym i doświadczeniu,
3. wnioskowanie oparte na matematyce.

Wczesne wzmianki i zastosowania matematyki do analizy prawdopodobieństwa:

- kryptografia arabska (Al-Khalil, Al-Kindi, Ibn Adlan), VIII–XIII wiek,

Przed Pascalem i Fermatem

Trzy poziomy wnioskowania probabilistycznego:

1. nieświadome wnioskowanie w świetle niepewności,
2. wnioskowanie oparte na języku naturalnym i doświadczeniu,
3. wnioskowanie oparte na matematyce.

Wczesne wzmianki i zastosowania matematyki do analizy prawdopodobieństwa:

- kryptografia arabska (Al-Khalil, Al-Kindi, Ibn Adlan), VIII–XIII wiek,
- prawdopodobieństwa wyników rzutu kośćmi

Przed Pascalem i Fermatem

Trzy poziomy wnioskowania probabilistycznego:

1. nieświadome wnioskowanie w świetle niepewności,
2. wnioskowanie oparte na języku naturalnym i doświadczeniu,
3. wnioskowanie oparte na matematyce.

Wczesne wzmianki i zastosowania matematyki do analizy prawdopodobieństwa:

- kryptografia arabska (Al-Khalil, Al-Kindi, Ibn Adlan), VIII–XIII wiek,
- prawdopodobieństwa wyników rzutu kośćmi („Owidiusz”, Cardano), XIII wiek, XV wiek.

Od Pascala i Fermata do Laplace'a

XVII w. Blaise Pascal i Pierre de Fermat, wartość oczekiwana,

Od Pascala i Fermata do Laplace'a

XVII w. Blaise Pascal i Pierre de Fermat, wartość oczekiwana,

Edmond Halley, tablice życia mieszkańców Wrocławia,

Od Pascala i Fermata do Laplace'a

XVII w. Blaise Pascal i Pierre de Fermat, wartość oczekiwana,

Edmond Halley, tablice życia mieszkańców Wrocławia,

XVIII w. Jacob Bernoulli, prawo wielkich liczb,

Od Pascala i Fermata do Laplace'a

XVII w. Blaise Pascal i Pierre de Fermat, wartość oczekiwana,

Edmond Halley, tablice życia mieszkańców Wrocławia,

XVIII w. Jacob Bernoulli, prawo wielkich liczb,

Georges-Louis Leclerc de Buffon, geometryczna definicja prawdopodobieństwa,

Od Pascala i Fermata do Laplace'a

XVII w. Blaise Pascal i Pierre de Fermat, wartość oczekiwana,

Edmond Halley, tablice życia mieszkańców Wrocławia,

XVIII w. Jacob Bernoulli, prawo wielkich liczb,

Georges-Louis Leclerc de Buffon, geometryczna definicja prawdopodobieństwa,

Abraham de Moivre, rozkład normalny,

Od Pascala i Fermata do Laplace'a

XVII w.	Blaise Pascal i Pierre de Fermat, wartość oczekiwana,
	Edmond Halley, tablice życia mieszkańców Wrocławia,
XVIII w.	Jacob Bernoulli, prawo wielkich liczb,
	Georges-Louis Leclerc de Buffon, geometryczna definicja prawdopodobieństwa,
	Abraham de Moivre, rozkład normalny,
	Thomas Bayes, twierdzenie Bayesa,

Od Pascala i Fermata do Laplace'a

XVII w. Blaise Pascal i Pierre de Fermat, wartość oczekiwana,

Edmond Halley, tablice życia mieszkańców Wrocławia,

XVIII w. Jacob Bernoulli, prawo wielkich liczb,

Georges-Louis Leclerc de Buffon, geometryczna definicja prawdopodobieństwa,

Abraham de Moivre, rozkład normalny,

Thomas Bayes, twierdzenie Bayesa,

XIX w. Adrien-Marie Legendre, metoda najmniejszych kwadratów,

Od Pascala i Fermata do Laplace'a

XVII w.	Blaise Pascal i Pierre de Fermat, wartość oczekiwana,
	Edmond Halley, tablice życia mieszkańców Wrocławia,
XVIII w.	Jacob Bernoulli, prawo wielkich liczb,
	Georges-Louis Leclerc de Buffon, geometryczna definicja prawdopodobieństwa,
	Abraham de Moivre, rozkład normalny,
	Thomas Bayes, twierdzenie Bayesa,
XIX w.	Adrien-Marie Legendre, metoda najmniejszych kwadratów,
	Pierre-Simon Laplace, klasyczna definicja prawdopodobieństwa.

Paradoks Bertranda (1889)

Joseph Bertrand
Narysujmy okrąg opisany na trójkącie równobocznym. Dodajemy losową cięciwę. Jaka jest szansa, że będzie ona dłuższa od boku trójkąta?

Podejście 1

Narysujmy styczną do okręgu i jako parametryzację cięciwy wybierzmy kąt pomiędzy styczną a cięciwą dotykającą stycznej do okręgu. Dla kątów $\alpha \in \Omega = (0, \pi)$, cięciwa jest wewnątrz okręgu. Zdarzenia sprzyjające to $\alpha \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$.
Prawdopodobieństwo tego, że cięciwa jest dłuższa od boku trójkąta to zatem

$$\frac{\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}}{\pi - 0} = \frac{1}{3}. \tag{1}$$

Podejście 2

Oprócz trójkąta równobocznego, dodajmy do rysunku sześciokąt foremny, dzielący trzy punkty z trójkątem. Analizując kąty na powstałym rysunku można zobaczyć, że bok trójkąta równobocznego dzieli wysokość okręgu w połowie. Oznacza to, że odległość cięciwy od środka okręgu może być traktowana jako nasze zdarzenia. Jeśli okrąg ma promień R, to cięciwy odległe od środka o $\left[0, \frac{R}{2}\right)$ są długości większej niż bok trójkąta. Aby mówić o cięciwie, jej odległość od środka musi być z przedziału $[0, R)$, zatem prawdopodobieństwo szukanego zdarzenia to

$$\frac{\frac{R}{2} - 0}{R - 0} = \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Podejście 3

Wybierzmy dowolny punkt wewnątrz koła. Istnieje tylko jedna cięciwa mająca środek w tym punkcie. Dorysujmy do trójkąta okrąg weń wpisany. Jeśli punkt wylosuje się wewnątrz okręgu wpisanego w trójkąt, będzie odpowiadał za cięciwę dłuższą niż bok trójkąta. Korzystając z prawdopodobieństwa geometrycznego, mamy zatem

$$\frac{\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}. \tag{3}$$

Paradoks Bertranda (1889)

Trzy różne podejścia, trzy różne wyniki — $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.

Paradoks Bertranda (1889)

Trzy różne podejścia, trzy różne wyniki — $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$.

Co poszło nie tak?

Dwa ważne wyniki z początku XX w.

XX w. Александр Михайлович Ляпунов, centralne twierdzenie graniczne (1901),

Dwa ważne wyniki z początku XX w.

XX w. Александр Михайлович Ляпунов, centralne twierdzenie graniczne (1901),

Андрей Николаевич Колмогоров, aksjomatyzacja teorii prawdopodobieństwa oparta na teorii miary (1933).

Dwa ważne wyniki z początku XX w.

XX w. Александр Михайлович Ляпунов, centralne twierdzenie graniczne (1901),

Андрей Николаевич Колмогоров, aksjomatyzacja teorii prawdopodobieństwa oparta na teorii miary (1933).

Dzięki Kołmogorowi dowiadujemy się, że paradoks Bertranda wynika ze źle określonego problemu, który nie definiuje co oznacza „wylosować cięciwę”. Opisane podejścia różnią się rozkładem prawdopodobieństwa cięciw na okręgu, co moglibyśmy zobaczyć losując je wielokrotnie według opisanych schematów, dodając do wykresu i obserwując różny „poziom szarości” wewnątrz różnych rejonów koła.

Czy to koniec?

Prawdopodobieństwo jako koncept istniało w społeczeństwie już w starożytności, ponieważ ludzie mierzyli się z wnioskowaniem przy braku pełnej informacji i niepewności.

Czy to koniec?

Prawdopodobieństwo jako koncept istniało w społeczeństwie już w starożytności, ponieważ ludzie mierzyli się z wnioskowaniem przy braku pełnej informacji i niepewności. Możemy zatem zadać pytanie — czy obecna teoria prawdopodobieństwa obsługuje wszystkie sytuacje, które wydaje nam się, że „powinna”?

Prawdopodobieństwo warunkowe

Przypomnijmy wzór, określony dla takich B, dla których $P(B) > 0$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Prawdopodobieństwo warunkowe

Przypomnijmy wzór, określony dla takich B, dla których $P(B) > 0$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Wylosujmy w sposób jednostajny punkt na powierzchni sfery modelującej kulę ziemską. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wylosowany punkt będzie na prawo od południka początkowego, pod warunkiem, że będzie znajdował się na równiku?

Intuicja kontra definicja

Intuicyjnie, jeśli każdy punkt na sferze ma taką samą szansę na zostanie wylosowanym, pod warunkiem, że wylosowany punkt będzie na równiku, wciąż powinniśmy mieć rozkład jednostajny punktów leżących na równiku. Szansa na wylosowanie punktu na prawo od południka początkowego, powinna zatem wynosić $\frac{1}{2}$, niezależnie od tego, na jakim równoleżniku wylosowany zostanie punkt.

Intuicja kontra definicja

Intuicyjnie, jeśli każdy punkt na sferze ma taką samą szansę na zostanie wylosowanym, pod warunkiem, że wylosowany punkt będzie na równiku, wciąż powinniśmy mieć rozkład jednostajny punktów leżących na równiku. Szansa na wylosowanie punktu na prawo od południka początkowego, powinna zatem wynosić $\frac{1}{2}$, niezależnie od tego, na jakim równoleżniku wylosowany zostanie punkt.

Z punktu widzenia teorii, to prawdopodobieństwo jest nieokreślone, ponieważ w definicji mamy $\frac{0}{0}$.

Intuicja kontra definicja

Intuicyjnie, jeśli każdy punkt na sferze ma taką samą szansę na zostanie wylosowanym, pod warunkiem, że wylosowany punkt będzie na równiku, wciąż powinniśmy mieć rozkład jednostajny punktów leżących na równiku. Szansa na wylosowanie punktu na prawo od południka początkowego, powinna zatem wynosić $\frac{1}{2}$, niezależnie od tego, na jakim równoleżniku wylosowany zostanie punkt.

Z punktu widzenia teorii, to prawdopodobieństwo jest nieokreślone, ponieważ w definicji mamy $\frac{0}{0}$.

To motywuje niektórych badaczy by dalej poszukiwać alternatywnych podejść prawdopodobieństwa.

Więcej o historii

- Franklin, J. „The Science of Conjecture: Evidence and Probability Before Pascal”. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2001,
- Todhunter, I. „A History of the Mathematical Theory of Probability: From the Time of Pascal to that of Laplace”. Cambridge University Press, 2014.
- von Plato, J. „Creating Modern Probability: Its Mathematics, Physics and Philosophy in Historical Perspective”, Cambridge University Press, 1994.
- Kendall, D. G., et al. „Andrei Nikolaevich Kolmogorov (1903–1987)”, Bulletin of the London Mathematical Society, Vol. 22(1), 1990, s. 31–100.

Interpretacje prawdopodobieństwa

3 podejścia do prawdopodobieństwa

1. prawd. epistemologiczne — pozwala mierzyć przesłanki na temat prawdziwości zdarzenia,
2. prawd. psychiczne — mówi o subiektywnym przekonaniu na dany temat,
3. prawd. statystyczne — mówi o fizycznej cesze obiektu, niezależnej od przekonań.

Prawd. epistemologiczne — podtypy

Epistemologia to dziedzina filozofii zajmująca się wiedzą. Epistemolodzy badają między innymi naturę, pochodzenie i zakres wiedzy oraz racjonalność wierzeń i uzasadnień.

Prawd. epistemologiczne — podtypy

Epistemologia to dziedzina filozofii zajmująca się wiedzą. Epistemolodzy badają między innymi naturę, pochodzenie i zakres wiedzy oraz racjonalność wierzeń i uzasadnień. Prawdopodobieństwo epistemologiczne dzieli się na prawdopodobieństwo klasyczne i logiczne, zwane także metodologicznym. Prawdopodobieństwo klasyczne zalicza się do prawdopodobieństwa matematycznego, czyli operującego na wartościach liczbowych. Prawdopodobieństwo logiczne odróżnia się tym od matematycznego, że operuje na zdaniach lub ich formalizacji. Prawdopodobieństwo logiczne jest jedną ze starszych interpretacji prawdopodobieństwa.

Prawd. statystyczne — podtypy

Prawdopodobieństwo statystyczne mówi o cechach fizycznych obiektu na tle innych obiektów. Jest niezależne od tego, co ktoś myśli na ten temat lub nawet, czy istnieje. Są trzy główne podtypy prawdopodobieństwa statystycznego: prawdopodobieństwo częstościowe, teoria skłonności lub tendencji (ang. propensity) oraz teoria najlepszego systemu (ang. best-system).

Popularność podejść

Teoria prawdopodobieństwa zwykle utożsamiana jest z prawdopodobieństwem częstościowym, subiektywnym oraz od niedawna — najlepszego systemu (w statystyce zaliczamy do nich podejście częstościowe, bayesowskie oraz Akaike'go odpowiednio).

Popularność podejść

Teoria prawdopodobieństwa zwykle utożsamiana jest z prawdopodobieństwem częstościowym, subiektywnym oraz od niedawna — najlepszego systemu (w statystyce zaliczamy do nich podejście częstościowe, bayesowskie oraz Akaike'go odpowiednio).
Prawdopodobieństwo logiczne oraz teoria tendencji są rzadziej spotykane.

Przykład teorii tendencji

Teoria tendencji

W teorii skłonności mówimy o przyczynowości wynikającej z warunków eksperymentu oraz cech obiektu. Dany obiekt ma skłonność lub tendencję do generowania pewnych wyników w określonych warunkach. Jest to prawdopodobieństwo obiektywne. W przeciwieństwie do częstościowego (również obiektywnego) prawdopodobieństwa, nie opisuje wyników eksperymentu. Teoria zakłada, że jeśli eksperymentator utrzyma względnie stałe warunki eksperymentu oraz będzie powtarzał doświadczenie, uzyskana zostanie seria wyników eksperymentu, którą można analizować metodami prawdopodobieństwa częstościowego. Wartość graniczna prawdopodobieństwa częstościowego będzie wtedy równa tendencji obiektu do uzyskania danego wyniku.

Początki teorii tendencji

Historycznie można przyporządkować teorię tendencji do Charlesa Sandersa Peirce'a (1910) oraz do Karla Poppera (1957).

Początki teorii tendencji

Historycznie można przyporządkować teorię tendencji do Charlesa Sandersa Peirce'a (1910) oraz do Karla Poppera (1957). W teorii Poppera jest rozwiązanie problemu, jaki zauważyliśmy w opisie prawdopodobieństwa warunkowego u Kołmogorowa!

Początki teorii tendencji

Historycznie można przyporządkować teorię tendencji do Charlesa Sandersa Peirce'a (1910) oraz do Karla Poppera (1957). W teorii Poppera jest rozwiązanie problemu, jaki zauważyliśmy w opisie prawdopodobieństwa warunkowego u Kołmogorowa! Popper nie definiuje bezwarunkowego prawdopodobieństwa, ponieważ filozoficznie tendencja jest ściśle związana z warunkami eksperymentu. Oznacza to, że Popper z powodu patrzenia na zjawiska fizyczne z innej perspektywy, traktuje prawdopodobieństwo warunkowe jako pojęcie pierwotne, za pomocą którego definiuje prawdopodobieństwo bezwarunkowe — zupełnie odwrotnie jak Kołmogorow.

Miary Poppera — uwaga, matma!

Jak było u Kołmogorowa?

- Niech $\Omega \neq \emptyset$ będzie zbiorem zdarzeń elementarnych,
- Niech $\mathcal{F}$ będzie sigma-ciałem zdarzeń losowych, czyli rodziną podzbiorów Ω taką, że:
  1. $\emptyset \in \mathcal{F}$,
  2. $A \in \mathcal{F} \implies A^C \in \mathcal{F}$,
  3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.
- $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ jest miarą prawdopodobieństwa lub prawdopodobieństwem, jeśli
  1. $P(A) \geq 0$ dla każdego $A \in \mathcal{F}$,
  2. $P(\Omega) = 1$,
  3. $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, gdy $A_i \cap A_j = \emptyset$ przy $i \neq j$.

Trójkę $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazywamy przestrzenią probabilistyczną.

Miary Poppera — uwaga, matma!

Jak jest u Poppera? Ω i $\mathcal{F}$ definiujemy tak samo, potem są różnice.

- Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ będzie zbiorem możliwych warunków eksperymentu.
- $P(\cdot|\cdot) : \mathcal{F} \times \mathcal{G} \to [0, 1]$ jest miarą Poppera lub tendencją, jeśli:
  1. dla każdego $B \in \mathcal{G}$, $P(\cdot|B)$ jest miarą prawdopodobieństwa, taką że $P(B|B) = 1$, oraz
  2. dla każdego $A, B, C \in \mathcal{F}$ o ile C oraz $C \cap B$ należą do zbioru $\mathcal{G}$ zachodzi $P(A \cap B|C) = P(A|B \cap C) \cdot P(B|C)$.

Czwórkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G}, P)$ nazywamy warunkową przestrzenią probabilistyczną.

Miary Poppera — uwaga, matma!

Jak jest u Poppera? Ω i $\mathcal{F}$ definiujemy tak samo, potem są różnice.

- Niech $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ będzie zbiorem możliwych warunków eksperymentu.
- $P(\cdot|\cdot) : \mathcal{F} \times \mathcal{G} \to [0, 1]$ jest miarą Poppera lub tendencją, jeśli:
  1. dla każdego $B \in \mathcal{G}$, $P(\cdot|B)$ jest miarą prawdopodobieństwa, taką że $P(B|B) = 1$, oraz
  2. dla każdego $A, B, C \in \mathcal{F}$ o ile C oraz $C \cap B$ należą do zbioru $\mathcal{G}$ zachodzi $P(A \cap B|C) = P(A|B \cap C) \cdot P(B|C)$.

Czwórkę $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{G}, P)$ nazywamy warunkową przestrzenią probabilistyczną.
Prawdopodobieństwo definiujemy jako $P(\cdot|T)$, gdzie T to zdarzenie pewne.

Różnice

Nie wszystko co działa w prawdopodobieństwie działa też w teorii tendencji. Przykładowo w teorii tej znajdują się odpowiedniki prawa wielkich liczb, ale nie ma odpowiednika twierdzenia Bayesa.

Zyskiem jest mniej paradoksalnych wyników oraz to, że w przeciwieństwie do prawdopodobieństwa częstościowego, można wnioskować z prawdopodobieństwa zmierzonego dla pojedynczego zdarzenia, co ma zastosowania w mechanice i obliczeniach kwantowych.

Przykład prawdopo- dobieństwa logicznego

Prawdopodobieństwo modalne

Prawdopodobieństwo modalne jest przykładem prawdopodobieństwa logicznego, które klasyfikuje prawdopodobieństwo prawdziwości zdarzenia do kilku możliwych wartości — zajmiemy się dwiema z nich — „możliwe" oraz „prawdopodobne", pozostawiając „wysoce prawdopodobne" dociekliwym kopaczom w literaturze.

Możliwe i prawdopodobne

Zaczynamy od przestrzeni zdarzeń Ω. Rozważamy zdarzenia $A \subset \Omega$.

1. Zbiór pusty $\emptyset$ nie jest ani możliwy, ani prawdopodobny.
2. Przestrzeń Ω jest możliwa i prawdopodobna.
3. $A = B \cup C$ jest możliwa $\iff$ B lub C jest możliwa.
4. Dla każdego A, co najwyżej jeden ze zbiorów A oraz A^C jest prawdopodobny.
5. Jeśli A jest prawdopodobne, $B \supseteq A$ jest prawdopodobne.
6. Jeśli A jest prawdopodobne, jest też możliwe.

Jak tu cokolwiek udowodnić?

Niech P będzie rodziną podzbiorów Ω. Mówimy, że P jest rodziną zbiorów możliwych $\iff$ spełnia aksjomaty 1–3.

Twierdzenie
Dla dowolnych niepustych Ω oraz $W \subseteq \Omega$,

$$P = \{A : \exists w \in W \quad w \in A\}$$

jest rodziną zbiorów możliwych. Jeśli Ω jest skończona, każda rodzina zbiorów możliwych jest określona w ten sposób.

Dowód $\Longrightarrow$

Załóżmy, że Ω jest niepusty i $W \subseteq \Omega$ jest niepusty. Zdefiniujmy P jako

$$P = \{A : \exists w \in W \quad w \in A\}.$$

Pokażemy, że prawdziwe są aksjomaty 1–3, czyli że P jest rodziną zbiorów możliwych.

1. $\emptyset \notin P$, ponieważ nie istnieje $w \in W$ taki, że $w \in \emptyset$,
2. $\Omega \in P$, ponieważ mamy $w \in W \subseteq \Omega$,czyli $w \in \Omega$,

3. $\Longrightarrow$ $A = B \cup C \in P$, zatem istnieje $w \in W$ takie, że $w \in B \cup C$, zatem $w \in B$ lub $w \in C$, zatem $B \in P$ lub $C \in P$,

3. $\Longleftarrow$ załóżmy, że $B \in P$ lub $C \in P$. Oznacza to, że istnieje $w \in W$ takie, że $w \in B$ lub $w \in C$. Stąd $w \in B \cup C$, czyli $A = B \cup C \in P$.

Dowód $\Longleftarrow$

Załóżmy, że Ω jest skończonym niepustym zbiorem oraz P jest rodziną zbiorów możliwych. Określmy W jako

$$W = \{w \in \Omega : \{w\} \in P\}\,.$$

Musimy pokazać, że W jest niepustym zbiorem i każdy zbiór $A \in P$ ma niepusty przekrój z W. Weźmy dowolny zbiór $A \in P$. Załóżmy, że ma on $k \geq 1$ elementów, przy czym $k \leq |\Omega| < \infty$. Ponieważ P to rodzina podzbiorów zbioru Ω, bez straty ogólności zakładamy, że $A = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$. Dla dowolnego j, $1 \leq j \leq k$, z aksjomatu 3, albo $\{\omega_j\} \in P$, albo $A \setminus \{\omega_j\} \in P$. Jeśli $\{\omega_j\} \in P$, udowodniliśmy, że W jest niepuste. Jeśli nie, powtarzamy procedurę maksymalnie k-krotnie dla innych j, albo dojść do tego samego wniosku. Z konstrukcji widać też, że każdy zbiór A musi mieć choć jeden $\{\omega_j\} \in P$, czyli $\omega_j \in W$. Stąd W i dowolny $A \in P$ ma niepusty przekrój.

Podobnie dla prawdopodobnego

Niech Π i $\mathcal{W}$ będą rodzinami podzbiorów Ω. Mówimy, że Π jest rodziną podzbiorów prawdopodobnych $\iff$ spełnia aksjomaty 1, 2, 4 oraz 5. Mówimy, że $\mathcal{W}$ jest generatorem zbiorów prawdopodobnych $\iff$ dla każdego $W_1, W_2 \in \mathcal{W}$ zachodzi $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ oraz dla dowolnego $W \in \mathcal{W}$ nie istnieje jego podzbiór właściwy należący do $\mathcal{W}$.

Twierdzenie

Dla dowolnego niepustego Ω, jeśli istnieje generator zbiorów prawdopodobnych $\mathcal{W}$ taki, że

$$\Pi = \{A : \exists W \in \mathcal{W} \quad A \supseteq W\},$$

to Π jest rodziną podzbiorów prawdopodobnych. Jeśli Ω jest skończona, prawdziwe jest również odwrotne wynikanie.

Wnioski z dwóch twierdzeń

Jeśli Ω jest skończony, istnieje jednoznaczna reprezentacja zbiorów prawdopodobnych i możliwych, co ułatwia analizę. W połączeniu z następującym twierdzeniem, możemy wywnioskować co jest możliwe z tego, co jest prawdopodobne.

Twierdzenie
Jeśli rodzina zbiorów prawdopodobnych Π jest generowana przez $\mathcal{W}$, rodzina zbiorów możliwych jest określona przez zbiór W zbudowany w ten sposób, aby miał niepusty przekrój z każdym $W_i \in \mathcal{W}$.

Wnioski z dwóch twierdzeń

Jeśli Ω jest skończony, istnieje jednoznaczna reprezentacja zbiorów prawdopodobnych i możliwych, co ułatwia analizę. W połączeniu z następującym twierdzeniem, możemy wywnioskować co jest możliwe z tego, co jest prawdopodobne.

Twierdzenie
Jeśli rodzina zbiorów prawdopodobnych Π jest generowana przez $\mathcal{W}$, rodzina zbiorów możliwych jest określona przez zbiór W zbudowany w ten sposób, aby miał niepusty przekrój z każdym $W_i \in \mathcal{W}$.

Pokazując, że pewne dowolne zdanie mające niepusty przekrój z którymś W_i nie jest możliwe, możemy wnioskować o tym, jak nie mogą wyglądać zbiory prawdopodobne.

Prawd. modalne vs częstościowe

Nie ma potrzeby określania σ-ciała zdarzeń losowych ani miary prawdopodobieństwa, ale jeśli można to zrobić, to zdarzenia możliwe będą mniej więcej odpowiadać tym, które mają $P(A) > 0$, natomiast zdarzenia prawdopodobne to te, które mają $P(A) > \frac{1}{2}$.

Prawd. modalne vs częstościowe

Nie ma potrzeby określania σ-ciała zdarzeń losowych ani miary prawdopodobieństwa, ale jeśli można to zrobić, to zdarzenia możliwe będą mniej więcej odpowiadać tym, które mają $P(A) > 0$, natomiast zdarzenia prawdopodobne to te, które mają $P(A) > \frac{1}{2}$.
Zaletą podejścia modalnego jest to, że działa również wtedy, gdy praktycznie nie jest możliwe przyporządkowanie prawdopodobieństw numerycznych do zdarzeń, wciąż jednak pozwalając na wnioskowanie. Tego typu wnioskowanie znajduje zastosowanie na przykład w sądownictwie i kryminologii, gdzie pewne zebrane dowody (na przykład mówiące, co nie jest możliwe), pozwalają wnioskować o tym, co jest prawdopodobne.

Więcej o innych podejściach

- Hájek, A., Hitchcock, C. (eds), „The Oxford Handbook of Probability and Philosophy", Oxford Handbooks, 2016.
- Hájek, A., „What Conditional Probability Could Not Be", Synthese 137: 273–323, 2003.
- Hájek, A., „Interpretations of Probability", Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2023, `https://plato.stanford.edu/entries/probability-interpret/`.
- Bandyopadhyay, P.S., Forster, M. (eds.), „Philosophy of Statistics", Handbook of the Philosophy of Science, Vol. 7, North Holland, 2011.

Co dalej?

Alternatywne teorie

Alternatywne teorie są obecnie ciekawostkami, interesującymi głównie filozofów nauki. Liczba przydatnych twierdzeń dostępnych w podejściu Kołmogorowa, powoduje, że jakiejkolwiek innej teorii trudno byłoby się wybić. To nie powoduje jednak, że nie możemy ich szukać, poznawać i czerpać z nich inne spojrzenia na to, co analizujemy każdego dnia — czy to w pracy z danymi, symulacjach, ale też mniej formalnym wnioskowaniu opartym na prawdopodobieństwie logicznym lub psychicznym.

Bawcie się dobrze w alternatywnej rzeczywistości!

Dziękuję za uwagę

Jakieś pytania?