Programowanie
1 wykład

Andrzej Giniewicz

01.03.2024

Podczas dzisiejszych zajęć zajmiemy się sposobem badania asymptotycznej złożoności obliczeniowej.

1 Notacja Bachmanna-Landaua

Zacznijmy od formalnej definicji klas funkcji o zadanym asymptotycznym zachowaniu. Skupimy się na badaniu zachowania funkcji rzeczywistych jednej zmiennej, przy argumencie zmierzającym do nieskończoności. Jest to najczęściej stosowany w informatyce wariant tej notacji, ponieważ interesuje nas badanie funkcji zależnych od rozmiaru problemu i to, co dzieje się, gdy rozmiar ten staje się coraz większy.

Najczęściej stosowanym oznaczeniem notacji Bachmanna-Landaua jest tak zwana notacja „duże O". Definiujemy w niej klasę funkcji $O(g(x))$ ograniczonych, co do modułu z dokładnością do stałej i od pewnego miejsca, z góry przez zadaną funkcję $g(x)$ nieujemną od pewnego miejsca. Formalnie $O(g(x))$ to zbiór funkcji

$$O(g(x)) = \left\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists M > 0 \quad \exists x_0 > 0 \quad \forall x > x_0 \quad |f(x)| \leqslant Mg(x)\right\}. \tag{1}$$

Potocznie mówimy, że $f(x)$ jest $O(g(x))$ lub f jest asymptotycznie ograniczona z góry przez g. Notacja ta jest często opisywana przy badaniu przypadku pesymistycznego, ponieważ podaje dodatkowe ograniczenie górne na już najgorszy możliwy przypadek, więc na pewno, jeśli przygotujemy się na to, co pokaże ograniczenie z góry, tym bardziej będziemy gotowi na przypadek najgorszy.

W notacji Bachmanna-Landaua rozróżnia się też inne klasy funkcji, na przykład „duże Θ", „duże Ω", „małe o" oraz „małe ω", oznaczające odpowiednio ograniczenie z dwóch stron, ograniczenie z dołu, zdominowanie z góry oraz zdominowanie z dołu, jednakże my skupimy się na najczęściej stosowanej notacji „duże O".

Do najczęściej stosowanych praw o notacji „duże O" należą:

1. dla funkcji $f(x)$ nieujemnej od pewnego momentu, $f(x)$ jest klasy $O(f(x))$,

2. dla dowolnej funkcji $f(x)$, $f(x)$ jest klasy $O(|f(x)|)$,

3. wielomiany stopnia n są klasy $O(x^n)$,

4. dla dwóch liczb $n < m$ zachodzi $O(x^n) \subsetneq O(x^m)$,
5. dla dowolnego $a > 1$ i $n \in \mathbb{R}$, zachodzi zawieranie $O(x^n) \subsetneq O(a^x)$,
6. jeśli $f(x)$ jest klasy $O(g(x))$, to $cf(x)$ również jest klasy $O(g(x))$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$,
7. jeśli $f_1(x)$ jest klasy $O(g_1(x))$ i $f_2(x)$ jest klasy $O(g_2(x))$, to $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ jest klasy $O(g_1(x)g_2(x))$,
8. jeśli $f_1(x)$ jest klasy $O(g_1(x))$ i $f_2(x)$ jest klasy $O(g_2(x))$, to $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ jest klasy $O(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$,
9. dla dowolnej stałej $c > 0$ zachodzi $O(g(x)) = O(cg(x))$,
10. jeśli $g_1(x)$ i $g_2(x)$ są nieujemne od pewnego miejsca, to prawdziwe jest równanie $O(g_1(x) + g_2(x)) = O(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$,
11. jeśli $O(g_1(x)) \subseteq O(g_2(x))$, to $O(\max\{g_1(x), g_2(x)\}) = O(g_2(x))$.

Praktyczną stroną notacji „duże O" jest uchwycenie najszybciej rosnącego składnika funkcji. Fakt 3 mówi nam, że funkcja $f(x) = 3x^2+2x-7$ jest klasy $O(x^2)$ czyli rośnie tak szybko, jak funkcja kwadratowa. Z punktu widzenia skomplikowania algorytmu, jest to najistotniejszy składnik, ponieważ jeśli x rośnie, czyli chcemy rozwiązać coraz większe i bardziej skomplikowane problemy, wielkość $2x$ staje się zupełnie nieznacząca w porównaniu z wielkością $3x^2$. Stała 3 przed kwadratem również nie jest tak istotna, jak informacja, że dla 2 razy większych problemów, czas trwania będzie aż 4 razy większy.

Oczywiście, analiza metodami kombinatoryki analitycznej, jak robiliśmy to do tej pory, jest bardziej precyzyjna. Nie zawsze jednak precyzja jest tym, na czym nam zależy. Niekiedy w zupełności jesteśmy zadowoleni z oszacowania górnego, które pozwala nam przygotować się na najgorsze i w razie czego miło się rozczarować, jeśli program zakończy działanie szybciej, niż się tego spodziewaliśmy.

2 Dowody faktów o notacji „duże O" Bachmanna-Landaua

Pokażemy teraz kilka twierdzeń prawdziwych dla notacji „duże O", które pomogą nam zrozumieć jej działanie. Zacznijmy od prostego twierdzenia, mówiącego, że dowolna funkcja $f(x)$ nieujemna od pewnego miejsca należy do klasy $O(f(x))$.

Twierdzenie 1. *Każda funkcja rzeczywista $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest klasy $O(f(x))$, jeśli spełnia warunek*

$$\exists x_0 > 0 \quad \forall x > x_0 \quad f(x) \geqslant 0.$$

Dowód. Zauważmy, że dla dowolnego $x > x_0$

$$|f(x)| = f(x).$$

Jeśli więc wybierzemy $M = 1$, zachodzi

$$|f(x)| = f(x) = Mf(x),$$

więc zachodzi też

$$|f(x)| \leqslant Mf(x).$$

Pokazaliśmy, że istnieją $x_0 > 0$ i $M = 1 > 0$ takie, że dla wszystkich $x > x_0$ zachodzi $|f(x)| \leqslant Mf(x)$, co oznacza, że $f(x)$ jest klasy $O(f(x))$. □

W praktyce twierdzenie to mówi nam, że funkcje opisujące klasy, powinny być od pewnego momentu nieujemne. Co jednak, jeśli funkcja $f(x)$ nie jest od pewnego miejsca nieujemna? Wtedy możemy skorzystać z następującego twierdzenia.

Twierdzenie 2. *Dowolna funkcja rzeczywista $f(x)$ jest klasy $O(|f(x)|)$.*

Dowód. Wybierzmy dowolne $x_0 > 0$ oraz $M = 1 > 0$. Wtedy dla każdego $x > x_0$ oczywiście

$$|f(x)| \leqslant |f(x)| = 1 \cdot |f(x)| = M \cdot |f(x)|.$$

Oznacza to, że $f(x)$ jest klasy $O(|f(x)|)$. □

Zobaczmy teraz, jak określa się klasę złożoności dla jednego z ważniejszych typów funkcji, wielomianów.

Twierdzenie 3. *Załóżmy, że $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ jest wielomianem rzeczywistym stopnia n, czyli $a_n \neq 0$. Wtedy $f(x)$ jest klasy $O(x^n)$.*

Dowód. Zauważmy, że dla wszystkich $x > 0$ zachodzi

$$\begin{aligned}
|f(x)| &= \left|a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0\right| = \\
&= x^n \cdot \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \ldots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right| \leqslant \\
&\leqslant x^n \cdot \left(|a_n| + \left|\frac{a_{n-1}}{x}\right| + \ldots + \left|\frac{a_1}{x^{n-1}}\right| + \left|\frac{a_0}{x^n}\right|\right) = \\
&= x^n \cdot \left(|a_n| + \frac{|a_{n-1}|}{x} + \ldots + \frac{|a_1|}{x^{n-1}} + \frac{|a_0|}{x^n}\right).
\end{aligned}$$

Wybierzmy pewne $x_0 > 0$ oraz M określone wzorem

$$M = |a_n| + \frac{|a_{n-1}|}{x_0} + \ldots + \frac{|a_1|}{x_0^{n-1}} + \frac{|a_0|}{x_0^n}. \tag{2}$$

Ponieważ $a_n \neq 0$, gwarantuje to, że $M > 0$. Zauważmy też, że wyrażenie postaci

$$|a_n| + \frac{|a_{n-1}|}{x} + \ldots + \frac{|a_1|}{x^{n-1}} + \frac{|a_0|}{x^n}$$

jest nierosnącą funkcją x dla $x > 0$, zatem dla każdego $x > x_0 > 0$, zachodzi

$$|a_n| + \frac{|a_{n-1}|}{x} + \ldots + \frac{|a_1|}{x^{n-1}} + \frac{|a_0|}{x^n} \leqslant |a_n| + \frac{|a_{n-1}|}{x_0} + \ldots + \frac{|a_1|}{x_0^{n-1}} + \frac{|a_0|}{x_0^n} = M.$$

Łącząc te obserwacje, dla każdego $x > x_0$ mamy

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leqslant x^n \cdot \left(|a_n| + \frac{|a_{n-1}|}{x} + \ldots + \frac{|a_1|}{x^{n-1}} + \frac{|a_0|}{x^n}\right) \leqslant \\
&\leqslant x^n \left(|a_n| + \frac{|a_{n-1}|}{x_0} + \ldots + \frac{|a_1|}{x_0^{n-1}} + \frac{|a_0|}{x_0^n}\right) = Mx^n.
\end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że istnieje takie dowolne $x_0 > 0$ oraz istnieje $M > 0$ określone wzorem (2) takie, że dla każdego $x > x_0$ zachodzi $|f(x)| \leqslant M \cdot x^n$. Wobec tego spełniony jest warunek (1). Oznacza to, że dowolny wielomian stopnia n należy do klasy $O(x^n)$. $\square$

Pokażemy teraz, że pomiędzy klasami $O(x^n)$ jest określona relacja zawierania.

Twierdzenie 4. *Dla dwóch liczb $n, m \in \mathbb{R}$, $n < m$, zachodzi $O(x^n) \subsetneq O(x^m)$.*

Dowód. Weźmy dowolną funkcję f z klasy $O(x^n)$. Oznacza to, że istnieje $x_0 > 0$ oraz $M > 0$ takie, że dla każdego $x > x_0$ zachodzi $|f(x)| \leqslant Mx^n$.

Zauważmy, że o ile tylko $x \geqslant 1$, to $x^n \leqslant x^m$ dla $n < m$. Ustalmy $x_0' = \max\{1, x_0\}$. Ponieważ $|f(x)| \leqslant Mx^n$ dla wszystkich $x > x_0$, ta sama nierówność zachodzi dla $x > x_0' \geqslant x_0$. Mamy więc, że dla wszystkich $x > x_0'$

$$|f(x)| \leqslant Mx^n \leqslant Mx^m.$$

Pokazaliśmy, że istnieje $x_0' = \max\{1, x_0\} > 0$ oraz $M > 0$ takie, że dla każdego $x > x_0'$ zachodzi $|f(x)| \leqslant Mx^m$, co oznacza, że $f(x)$ jest klasy $O(x^m)$. Ponieważ $f(x)$ była dowolną funkcją klasy $O(x^n)$ oznacza to, że

$$O(x^n) \subseteq O(x^m), \qquad \text{dla } m > n.$$

Aby pokazać, że pomiędzy klasami nie zachodzi równość, weźmy funkcję $f(x) = x^m$. Funkcja ta jest klasy $O(x^m)$, co wynika z twierdzenia 1. Zwróćmy uwagę, że ponieważ m nie musi być naturalne, więc nie możemy skorzystać z twierdzenia 3. Pokażemy teraz, że funkcja $f(x) = x^m$ nie jest klasy $O(x^n)$ dla $n < m$.

Chcemy pokazać, że nie istnieją takie $x_0 > 0$ oraz $M > 0$, że dla każdego $x > x_0$ zachodzi $|x^m| \leqslant Mx^n$. Przypomnijmy, że $x > x_0 > 0$, zatem możemy pominąć moduł. Podzielmy stronami przez x^n. Nasz warunek przyjmuje wtedy postać

$$x^{m-n} \leqslant M.$$

Ponieważ $n < m$ to $m - n > 0$, więc możemy podnieść wyrażenie stronami do potęgi $\frac{1}{m-n}$, uzyskując

$$x \leqslant \sqrt[m-n]{M}.$$

Oznacza to, że nierówność $|x^m| \leqslant Mx^n$ nie może być prawdziwa dla wszystkich $x > x_0$, ponieważ jest prawdziwa tylko dla $x \leqslant \sqrt[m-n]{M}$ i fałszywa dla wszystkich $x > \sqrt[m-n]{M}$. Oznacza to, że nie istnieje takie $x_0 > 0$ i $M > 0$, żeby równanie to było prawdziwe, więc x^m nie jest klasy $O(x^n)$ dla $n < m$.

Wobec tego znaleźliśmy funkcję klasy $O(x^m)$, która nie jest klasy $O(x^n)$, zatem pokazaliśmy, że $O(x^n) \neq O(X^m)$, czyli ostatecznie

$$O(x^n) \subsetneq O(x^m) \qquad \text{dla } n < m,$$

co kończy dowód. $\square$

Pokażemy teraz, że istnieje klasa większa od dowolnej klasy $O(x^n)$.

Twierdzenie 5. *Dla dowolnego $n \in \mathbb{R}$ klasa $O(x^n)$ zawiera się w klasie $O(a^x)$ dla dowolnego $a > 1$, w szczególności $O(x^n) \subsetneq O(a^x)$.*

Dowód. Pokażemy, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n \in \mathbb{N}$. Dowód wymaga niewielkiej modyfikacji, aby pokazać, że to samo jest prawdą dla dowolnego $n \in \mathbb{R}$, co stanowi dobre ćwiczenie. Podpowiedź — można skorzystać z pokazanego wcześniej zawierania klas i z faktu, że $\lceil n \rceil \in \mathbb{N}$.

Aby pokazać twierdzenie dla liczb naturalnych, wybierzmy dowolne $n \in \mathbb{N}$, dowolne $a > 1$ i dowolnej funkcji $f(x)$ klasy $O(x^n)$. Pokażmy najpierw fakt, że

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{a^x} = 0.$$

Ponieważ $f(x)$ jest klasy $O(x^n)$, istnieje $x_0 > 0$ oraz $M > 0$ takie, że dla każdego $x > x_0$ zachodzi $|f(x)| \leqslant Mx^n$. W szczególności, oznacza to, że

$$0 \leqslant \lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{a^x} \leqslant \lim_{x\to\infty} \frac{Mx^n}{a^x} = M \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{a^x}.$$

Stosując regułę de L'Hôpitala n-krotnie, otrzymujemy

$$0 \leqslant \lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{a^x} \leqslant M \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{(\ln a)^n a^x} = \frac{Mn!}{(\ln a)^n} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{a^x} = \frac{Mn!}{(\ln a)^n} \cdot 0 = 0,$$

co dowodzi, że

$$\lim_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{a^x} = 0,$$

dla dowolnej funkcji f klasy $O(x^n)$ dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$.

Przytoczmy teraz definicję Cauchy'ego granicy w nieskończoności. Obliczona granica przekłada się na następującą formułę

$$\forall M > 0 \quad \exists x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall x > x_0 \quad \left| \frac{|f(x)|}{a^x} - 0 \right| < M.$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\forall M > 0 \quad \exists x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall x > x_0 \quad |f(x)| < Ma^x,$$

co jest mocniejszym warunkiem niż warunek na to, żeby $f(x)$ było klasy $O(a^x)$

$$\exists M > 0 \quad \exists x_0 \in \mathbb{R} \quad \forall x > x_0 \quad |f(x)| < Ma^x.$$

Pokazaliśmy zatem, że klasa $O(a^x)$ zawiera w sobie wszystkie klasy $O(x^n)$ dla wszystkich n. To jednak nie wystarcza, aby pokazać, że zawieranie to jest zawieraniem właściwym.

Weźmy funkcję a^x. Na mocy twierdzenia 1 należy do klasy $O(a^x)$. Pokażmy, że nie może być klasy $O(x^n)$ dla dowolnego n. Gdyby tak było, istniałoby $x_0 > 0$ oraz $M > 0$ takie, że dla wszystkich $x > x_0$ zachodziłoby

$$|a^x| \leqslant Mx^n,$$

czyli równoważnie

$$\frac{x^n}{a^x} \geqslant \frac{1}{M} > 0.$$

Pokazaliśmy jednak już wcześniej, że funkcja $\frac{x^n}{a^x}$ dąży do zera przy $x \to \infty$, zatem nie jest możliwym, aby dla każdego $x > x_0$ była większa lub równa $\frac{1}{M}$. Jest to sprzecznością z naszym założeniem, że funkcja a^x jest klasy x^n dla jakiegokolwiek n. □

W podobny sposób można pokazać, że

$$O(x^n) \subsetneq O(x^n log_a^m(x)) \subsetneq O(x^{n+1}),$$

dla dowolnych $m, n > 0$ i $a > 1$.

Pokażmy teraz podstawowe prawa dotyczące arytmetyki w notacji asymptotycznej.

Twierdzenie 6. *Jeśli $f(x)$ jest klasy $O(g(x))$, to $cf(x)$ również jest klasy $O(g(x))$ dla dowolnego $c \in \mathbb{R}$.*

Dowód. Rozważmy dwa przypadki. W pierwszym załóżmy, że $c \neq 0$. Załóżmy teraz, że $f(x)$ jest klasy $O(g(x))$. Oznacza to, że istnieje $x_0 > 0$ oraz $M > 0$ takie, że dla każdego $x > x_0$ zachodzi $|f(x)| \leqslant Mg(x)$. Wybierzmy $M' = |c| \cdot M$. Oczywiście $M' > 0$ i dodatkowo

$$|cf(x)| = |c| \cdot |f(x)| \leqslant |c| \cdot Mg(x) = M'g(x).$$

Udało nam się znaleźć $x_0 > 0$ oraz $M' = |c| \cdot M > 0$ takie, że dla każdego $x > x_0$ zachodzi $|cf(x)| \leqslant M'g(x)$, co oznacza, że $cf(x)$ jest klasy $O(g(x))$ dla $c \neq 0$.

Rozważmy teraz drugi przypadek, $c = 0$. W tym przypadku funkcja $cf(x) = 0$ dla każdego x. Oznacza to, że dla dowolnego $M > 0$ warunek na należenie do klasy $O(g(x))$, czyli $cf(x) \leqslant Mg(x)$ przekształca się do postaci $g(x) \geqslant 0$, co jest równoznaczne z warunkiem, że funkcja $g(x)$ jest nieujemna od pewnego miejsca — warunek ten jest częścią definicji, ponieważ tylko dla takich funkcji sens ma określanie klasy funkcji. Wobec tego 0 należy do każdej złożoności, w szczególności również do $O(g(x))$. □

W praktyce twierdzenie 6 mówi nam, że stała nie ma znaczenia dla klasy w notacji Bachmanna-Landaua.

Twierdzenie 7. *Jeśli $f_1(x)$ jest klasy $O(g_1(x))$ oraz $f_2(x)$ jest klasy $O(g_2(x))$, to iloczyn $f(x) = f_1(x)f_2(x)$ jest klasy $O(g_1(x)g_2(x))$.*

Dowód. Załóżmy, że $f_1(x)$ jest klasy $O(g_1(x))$. Oznacza to, że istnieje $x_1 > 0$ i $M_1 > 0$ takie, że dla każdego $x > x_1$ zachodzi $|f_1(x)| \leqslant M_1g_1(x)$. Załóżmy też, że $f_2(x)$ jest klasy $O(g_2(x))$. Oznacza to, że istnieje $x_2 > 0$ i $M_2 > 0$ takie, że dla każdego $x > x_2$ zachodzi $|f_2(x)| \leqslant M_2g_2(x)$. Wybierzmy $x_0 = \max\{x_1, x_2\} > 0$. Wtedy dla każdego $x > x_0$ zachodzi jednocześnie $|f_1(x)| \leqslant M_1g_1(x)$ oraz $|f_2(x)| \leqslant M_2g_2(x)$. Wybierzmy $M = M_1M_2 > 0$. Dla każdego $x > x_0$ mamy

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |f_1(x)f_2(x)| = |f_1(x)| \cdot |f_2(x)| \leqslant M_1g_1(x) \cdot M_2g_2(x) = M_1M_2 \cdot g_1(x)g_2(x) = \\ &= M \cdot g_1(x)g_2(x).\end{aligned}$$

Oznacza to, że znaleźliśmy takie $x_0 = \max\{x_1, x_2\} > 0$ oraz takie $M = M_1M_2 > 0$, że dla każdego $x > x_0$ zachodzi $|f_1(x)f_2(x)| \leqslant M \cdot g_1(x)g_2(x)$, zatem $f(x)$ jest klasy $O(g_1(x)g_2(x))$. $\square$

Zauważmy, że twierdzenie 6 może być widziane jako szczególny przypadek twierdzenia 7, jeśli przyjmiemy $f_1(x) = c$ będące klasy $O(1)$ (patrz twierdzenie 3) oraz $f_2(x) = f(x)$ klasy $O(g(x))$. Wtedy $cf(x) = f_1(x)f_2(x)$ jest klasy $O(1 \cdot g(x))$ czyli $O(g(x))$. Niemniej jednak wyszczególnienie go wprost i udowodnienie niezależnie, ma dodatkowe walory edukacyjne.

Naturalnym kolejnym krokiem w analizie złożoności, skoro wiemy jak wygląda asymptotyczne zachowanie funkcji będących iloczynem dwóch innych, jest zbadanie asymptotycznego zachowania sumy dwóch funkcji.

Twierdzenie 8. *Jeśli $f_1(x)$ jest klasy $O(g_1(x))$ oraz $f_2(x)$ jest klasy $O(g_2(x))$, to funkcja $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ jest klasy $O(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$.*

Dowód. Załóżmy, że $f_1(x)$ jest klasy $O(g_1(x))$. Oznacza to, że istnieje $x_1 > 0$ i $M_1 > 0$ takie, że dla każdego $x > x_1$ zachodzi $|f_1(x)| \leqslant M_1 g_1(x)$. Załóżmy też, że $f_2(x)$ jest klasy $O(g_2(x))$. Oznacza to, że istnieje $x_2 > 0$ i $M_2 > 0$ takie, że dla każdego $x > x_2$ zachodzi $|f_2(x)| \leqslant M_2 g_2(x)$. Wybierzmy $x_0 = \max\{x_1, x_2\} > 0$. Wtedy dla każdego $x > x_0$ zachodzi jednocześnie $|f_1(x)| \leqslant M_1 g_1(x)$ oraz $|f_2(x)| \leqslant M_2 g_2(x)$. Wybierzmy $M = 2\max\{M_1, M_2\}$. Dla każdego $x > x_0$ mamy

$$
\begin{aligned}
|f(x)| &= |f_1(x) + f_2(x)| \leqslant |f_1(x)| + |f_2(x)| \leqslant M_1 g_1(x) + M_2 g_2(x) \leqslant \\
&\leqslant \max\{M_1, M_2\} g_1(x) + \max\{M_1, M_2\} g_2(x) = M \cdot \frac{g_1(x) + g_2(x)}{2} \leqslant \\
&\leqslant M \cdot \frac{\max\{g_1(x), g_2(x)\} + \max\{g_1(x), g_2(x)\}}{2} = M \cdot \frac{2\max\{g_1(x), g_2(x)\}}{2} = \\
&= M \cdot \max\{g_1(x), g_2(x)\}.
\end{aligned}
$$

Oznacza to, że znaleźliśmy $x_0 = \max\{x_1, x_2\} > 0$ oraz stałą $M = 2\max\{M_1, M_2\} > 0$ taką, że dla każdego $x > x_0$ zachodzi $|f(x)| \leqslant M \cdot \max\{g_1(x), g_2(x)\}$. Oznacza to, że $f(x)$ jest klasy $O(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$. $\square$

Na koniec pokażemy trzy fakty dotyczące postaci nie funkcji a całych klas.

Twierdzenie 9. *Dla dowolnej stałej $c > 0$ zachodzi $O(g(x)) = O(cg(x))$.*

Dowód. Równość klas funkcji pokazujemy poprzez pokazanie zawierania w dwie strony. Pokażemy najpierw, że $O(g(x)) \subseteq O(cg(x))$. Wybierzmy dowolną funkcją $f(x)$ klasy $O(g(x))$. Pokażemy, że jest też klasy $O(cg(x))$. Skoro $f(x)$ jest klasy $O(g(x))$ istnieje $x_0 > 0$ oraz $M > 0$ takie, że dla każdego $x > x_0$ zachodzi $|f(x)| \leqslant Mg(x)$. Weźmy $M' = \frac{M}{c} > 0$. Wtedy możemy zapisać

$$|f(x)| \leqslant Mg(x) = \frac{M}{c} \cdot cg(x) = M' \cdot cg(x),$$

co oznacza, że $f(x)$ jest klasy $O(cg(x))$. Zawieranie w drugą stronę można pokazać w analogiczny sposób, pozostawiamy to jako ćwiczenie. $\square$

W praktyce twierdzenie to oznacza, że wewnątrz notacji „duże O" możemy skreślić stałe.

Twierdzenie 10. *Prawdziwa jest równość* $O(g_1(x) + g_2(x)) = O(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$ *o ile* $g_1(x)$ *i* $g_2(x)$ *są od pewnego miejsca nieujemne.*

Dowód. Weźmy dowolną funkcję $f(x)$ klasy $O(g_1(x)+g_2(x))$. Oznacza to, że istnieje $x_0 > 0$ oraz $M > 0$ taki, że dla każdego $x > x_0$ zachodzi $|f(x)| \leqslant M(g_1(x) + g_2(x))$. Wybierzmy $M' = 2M$. Wtedy dla każdego $x > x_0$

$$|f(x)| \leqslant M(g_1(x) + g_2(x)) \leqslant M(\max\{g_1(x), g_2(x)\} + \max\{g_1(x), g_2(x)\}) = \\ = 2M \max\{g_1(x), g_2(x)\} = M' \max\{g_1(x), g_2(x)\}.$$

Pokazaliśmy, że istnieje $x_0 > 0$ oraz $M' = 2M > 0$ takie, że dla każdego $x > x_0$ zachodzi $|f(x)| \leqslant M' \max\{g_1(x), g_2(x)\}$, czyli dowolna funkcja klasy $O(g_1(x) + g_2(x))$ jest również klasy $O(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$. Oznacza to, że $O(g_1(x) + g_2(x)) \subseteq O(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$.

Pokażemy teraz drugie zawieranie. Weźmy dowolną funkcję $f(x)$ należącą do klasy $O(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$. Oznacza to, że istnieje $x_0 > 0$ oraz $M > 0$ takie, że dla każdego $x > x_0$ zachodzi $|f(x)| \leqslant M \max\{g_1(x), g_2(x)\}$. Skorzystajmy teraz z założenia, że $g_1(x)$ i $g_2(x)$ są od pewnego miejsca nieujemne. Oznacza to, że istnieje $x_1 > 0$ taki, że dla każdego $x > x_1$ zachodzi $g_1(x) \geqslant 0$ oraz istnieje $x_2 > 0$ takie, że dla każdego $x > x_2$ zachodzi $g_2(x) \geqslant 0$. Wybierzmy $x_0' = \max\{x_0, x_1, x_2\}$. Dla każdego $x > x_0'$ spełnione są jednocześnie trzy warunki:

- $|f(x)| \leqslant M \max\{g_1(x), g_2(x)\}$,
- $g_1(x) \geqslant 0$,
- $g_2(x) \geqslant 0$.

Zauważmy, że dla liczb nieujemnych $a, b \geqslant 0$ zachodzi $\max\{a, b\} \leqslant a + b$. Podsumowując, dla dowolnego $x > x_0$ mamy

$$|f(x)| \leqslant M \max\{g_1(x), g_2(x)\} \leqslant M\left(g_1(x) + g_2(x)\right).$$

Oznacza to, że $f(x)$ jest klasy $O(g_1(x) + g_2(x))$. Oznacza to, że pokazaliśmy drugie zawieranie a tym samym równość obu klas. □

Ostatnie twierdzenie, które omówimy, dotyczy tego, jak w praktyce wyznaczyć złożoność maksimum.

Twierdzenie 11. *Załóżmy, że* $O(g_1(x)) \subseteq O(g_2(x))$. *Wtedy* $O(\max\{g_1(x), g_2(x)\}) = O(g_2(x))$.

Dowód. Zauważmy, że jedno zawieranie pomiędzy $O(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$ i $O(g_2(x))$ jest zawsze prawdziwe i oczywiste. Zanim przeczytasz dowód, postaraj się odkryć, w którą stronę dowód przebiega bez konieczności poczynienia dodatkowych założeń.

Pokażemy najpierw $O(g_2(x)) \subseteq O(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$. Weźmy dowolną funkcję $f(x)$ klasy $O(g_2(x))$. Oznacza to, że istnieje $x_0 > 0$ oraz $M > 0$ takie, że dla każdego $x > x_0$ zachodzi $|f(x)| \leqslant Mg_2(x)$. Z definicji maksimum, mamy pewność, że $a \leqslant \max\{a, b\}$. Wobec tego

$$|f(x)| \leqslant Mg_2(x) \leqslant M \max\{g_1(x), g_2(x)\}.$$

Oznacza to, że $O(g_2(x)) \subseteq O(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$. Do pokazania, że zachodzi zawieranie $O(\max\{g_1(x), g_2(x)\}) \subseteq O(g_2(x))$ musimy skorzystać z zawierania $O(g_1(x)) \subseteq O(g_2(x))$. Weźmy dowolną funkcję $f(x)$ klasy $O(\max\{g_1(x), g_2(x)\})$. Oznacza to, że istnieje $x_0 > 0$ oraz $M > 0$ takie, że dla każdego $x > x_0$ zachodzi $|f(x)| \leqslant M \max\{g_1(x), g_2(x)\}$. Ponieważ $O(g_1(x)) \subseteq O(g_2(x))$ wiemy, że istnieje $x_1 > 0$ takie, że dla $x > x_1$ zachodzi $g_1(x) \geqslant 0$ oraz istnieje $x_2 > 0$ takie, że dla $x > x_2$ zachodzi $g_2(x) \geqslant 0$. Weźmy $x_0^{'} = \max\{x_0, x_1, x_2\}$. Wtedy dla każdego $x > x_0$ zachodzą jednocześnie warunki:

- $|f(x)| \leqslant M \max\{g_1(x), g_2(x)\}$,
- $g_1(x) \geqslant 0$,
- $g_2(x) \geqslant 0$.

Ponieważ $g_1(x) \geqslant 0$ i $g_2(x) \geqslant 0$, to

$$|f(x)| \leqslant M \max\{g_1(x), g_2(x)\} = \left|M \max\{g_1(x), g_2(x)\}\right|.$$

Jeśli pokażemy, że funkcja $h(x) = \max\{g_1(x), g_2(x)\}$ jest klasy $O(g_2(x))$, zakończy to dowód, ponieważ to zagwarantuje nam, że od pewnego momentu $|\max\{g_1(x), g_2(x)\}| \leqslant M^{'} g_2(x)$, co będzie jednocześnie poszukiwanym ograniczeniem na funkcję $|f(x)|$.

Zauważmy, że na mocy twierdzenia 1, $g_1(x)$ jest klasy $O(g_1(x))$, więc ponieważ zachodzi zawieranie $O(g_1(x)) \subseteq O(g_2(x))$, to $g_1(x)$ jest również klasy $O(g_2(x))$. Na mocy tego samego twierdzenia, $g_2(x)$ również jest klasy $O(g_2(x))$. Obie funkcje $g_1(x)$ i $g_2(x)$ są nieujemne od pewnego momentu, czyli istnieje $x_1 > 0$ takie, że dla $x > x_1$ zachodzi $g_1(x) \geqslant 0$ oraz istnieje $x_2 > 0$ takie, że dla $x > x_2$ zachodzi $g_2(x) \geqslant 0$. Obie funkcje są również klasy $O(g_2(x))$, czyli w szczególności dla $g_1(x)$ istnieje $x_0 > 0$ i $M > 0$ takie, że dla każdego $x > x_0$ zachodzi $|g_1(x)| \leqslant Mg_2(x)$. Weźmy $x_0^{'} = \max\{x_0, x_1, x_2\}$. Wtedy dla dowolnego $x > x_0$ zachodzą jednocześnie cztery warunki:

- $|g_2(x)| \leqslant 1g_2(x)$,
- $|g_1(x)| \leqslant Mg_2(x)$,
- $g_1(x) \geqslant 0$,
- $g_2(x) \geqslant 0$.

Podsumowując, dla dowolnego $x > x_0^{'}$ i $M^{'} = M + 1 > 0$, zachodzi

$$\begin{aligned} |\max\{g_1(x), g_2(x)\}| = \max\{g_1(x), g_2(x)\} \leqslant g_1(x) + g_2(x) = |g_1(x)| + |g_2(x)| \leqslant \\ \leqslant 1g_2(x) + Mg_2(x) = (M+1)g_2(x) = M^{'} g_2(x). \end{aligned}$$

Pokazaliśmy, że dla dowolnego $x > x_0' = \max\{x_0, x_1, x_2\} > 0$ oraz $M' = M + 1 > 0$ zachodzi $|\max\{g_1(x), g_2(x)\}| \leqslant M' g_2(x)$, czyli że $\max\{g_1(x), g_2(x)\}$ jest klasy $O(g_2(x))$. Oznacza to, że również $f(x)$ jest klasy $O(g_2(x))$, czyli że $O(\max\{g_1(x), g_2(x)\}) \subseteq O(g_2(x))$. Ostatecznie, pokazaliśmy oba zawierania, co kończy dowód. $\square$

Korzystając z twierdzenia 11 i zawierania dla klas postaci $O(x^n)$ można przeprowadzić alternatywny dowód twierdzenia 3. Zastanów się, czy potrafisz go przeprowadzić, korzystając z pokazanych w notatkach faktów.

3 Złożoność algorytmu a złożoność problemu

Jeśli funkcja $f(x)$ klasy $O(g(x))$ opisuje złożoność algorytmu dla rozmiaru x, mówimy, że algorytm jest klasy $O(g(x))$. Oczywiście, każdy problem i każde zagadnienie, możemy rozwiązać na wiele sposobów. Niektóre z nich bardziej, inne mniej efektywne. Najlepsza w sensie zawierania złożoność, jaką jesteśmy w stanie przypisać dowolnemu rozwiązaniu problemu, nazywa się złożonością problemu. I tak złożoność algorytmów sortowania list długości x opartych o porównania może wynosić $O(x \log(x))$, choć oczywiście istnieją też algorytmy działające w czasie $O(x^2)$.

Algorytmy, które mają rozwiązanie działające w czasie należącym do klasy $O(x^n)$ dla pewnego $n \in \mathbb{N}$, nazywamy algorytmami działającymi w czasie wielomianowym. Klasę wszystkich algorytmów rozwiązywalnych w czasie wielomianowym[1], nazywamy klasą P. Oprócz klasy P definiuje się inne klasy, między innymi klasę NP. Klasa NP to wszystkie algorytmy, dla których jesteśmy w stanie sprawdzić, czy coś jest rozwiązaniem, w czasie wielomianowym. Wiadomo, że $P \subseteq NP$, ale nie wiadomo, czy $P = NP$, czy też nie. Problem ten jest jednym z problemów milenijnych, o których już raz mieliśmy okazję wspominać.

[1] Na maszynie Turinga, która jest modelem współcześnie stosowanego komputera.