Całki podwójne — współrzędne biegunowe

Wykład dla Wydziału Architektury

Dawid Huczek

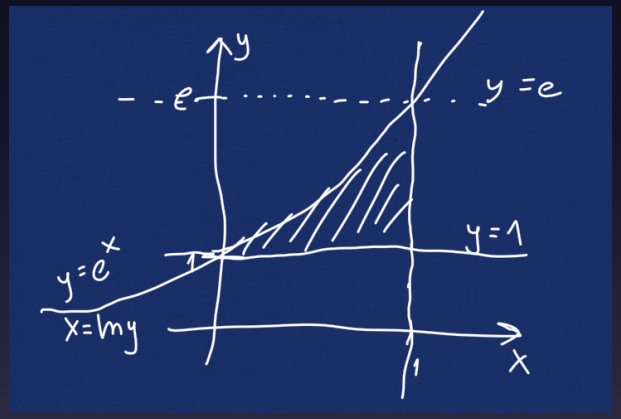
23.03.2020 r.

Powtórka z ostatniego wykładu

- **Przykład:** Obliczyć

$$\int_0^1 dx \int_1^{e^x} \frac{1}{1-\ln y} dy$$

- Obszar całkowania wygląda tak:



- W takim razie całkę możemy zapisać jako

$$\int_{y=1}^{y=e} dy \int_{x=\ln y}^{x=1} \frac{1}{1-\ln y} dx$$

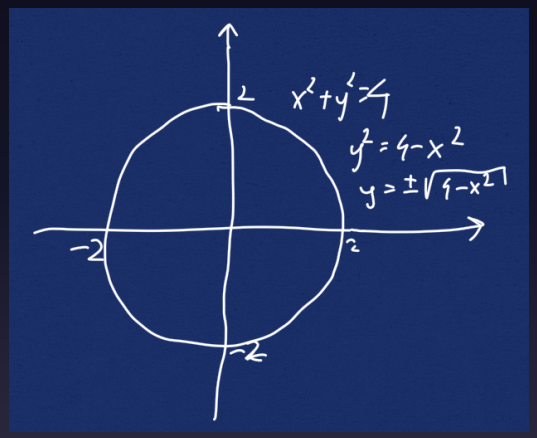
- Obliczyć całkę

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy,$$

gdzie

$$D = \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

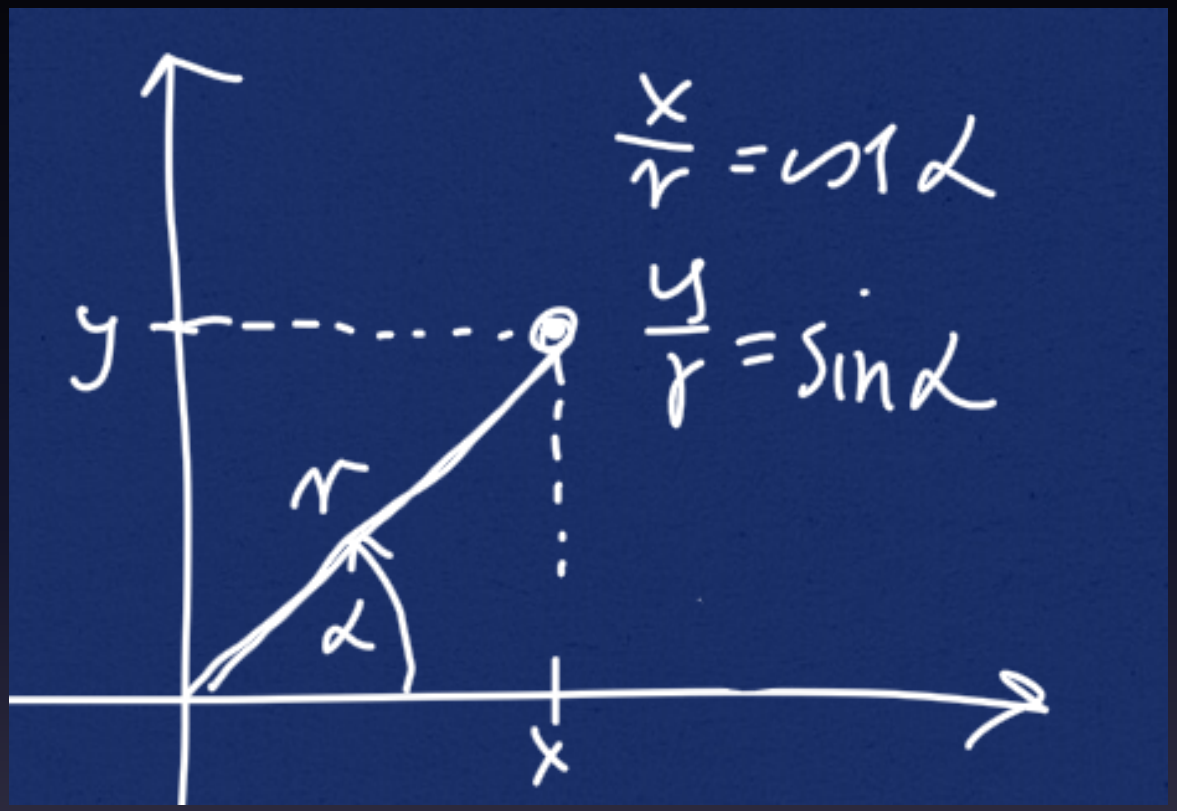
- Obszar całkowania:



- W takim razie całkę możemy zapisać jako

$$\int_{x=-2}^{x=2} dx \int_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{y=\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy \text{ — trudne!}$$

Przypomnienie współrzędnych biegunowych



- $x = r\cos\alpha$
- $y = r\sin\alpha$
- Zawsze $r \geq 0$, $\alpha \in [-\pi, \pi]$ lub $\alpha \in [0, 2\pi]$

Całkowanie we współrzędnych biegunowych

- Powiedzmy, że chcemy obliczyć $\iint_D f(x,y)dxdy$.
- Ustalamy postać obszaru całkowania we wzpółrzędnych biegunowych, nazwijmy ją B.
- $$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_B \Big(f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\cdot r \Big) drd\alpha.$$

- Wróćmy do naszego przykładu. Obszarem całkowania było

$$D = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\right\}.$$

- We współrzędnych biegunowych opis obszaru ma postać $r^2 \leq 4$, czyli $r \leq 2$.
- Nie znaleźliśmy dolnego ograniczenia na r, więc przyjmujemy $r \geq 0$.
- Nie dostaliśmy też ograniczeń na α, więc $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.
- Ostatecznie opis obszaru we współrzędnych biegunowych wygląda tak:

$$B = \{(r, \alpha) : \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi; \quad 0 \leq r \leq 2\}.$$

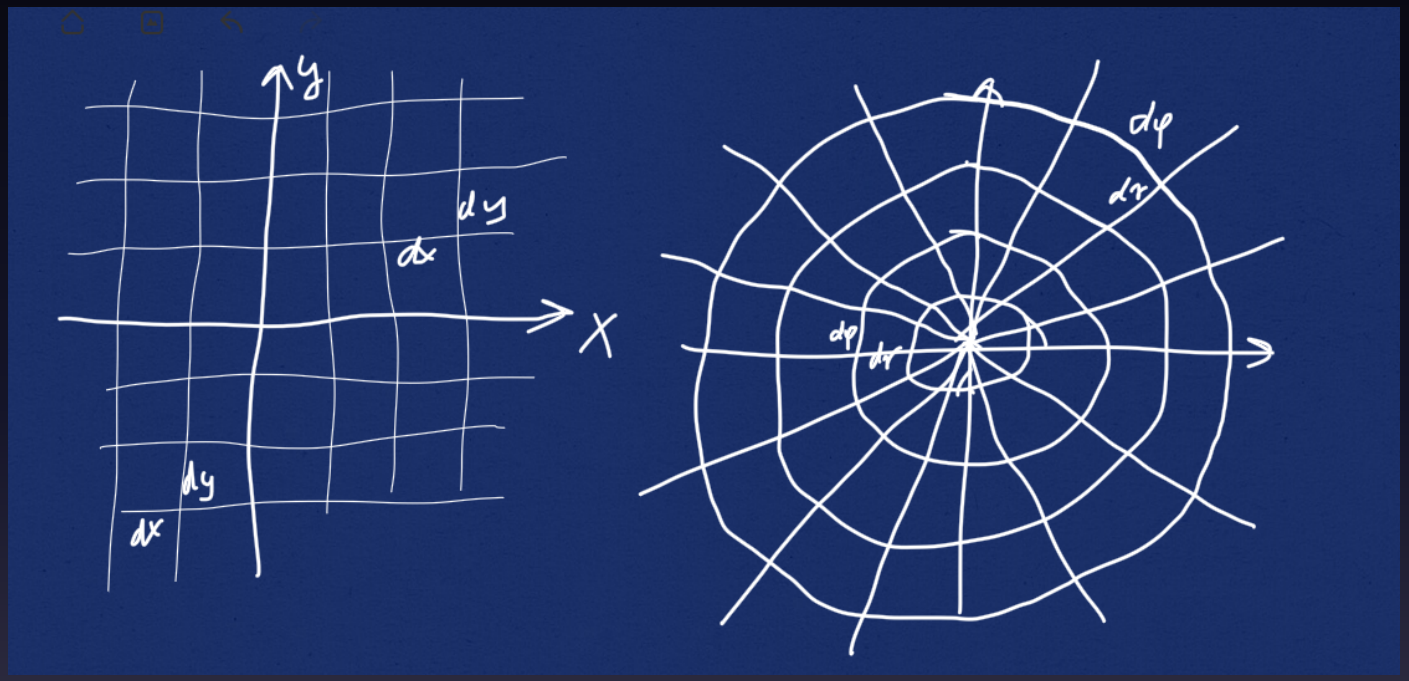
- Zauważmy jeszcze, że $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{r^2} = r$.
- W takim razie możemy już zapisać całkę we współrzędnych biegunowych:

$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}dxdy = \iint_B r \cdot r drd\alpha = (...)$$

- Mamy też nierówności na α i r, więc dalej

$$(...) = \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} d\alpha \int_{r=0}^{r=2} r^2 dr = (...) = \frac{16}{3}\pi.$$

Dlaczego musimy pomnożyć funkcję podcałkową przez r?



Pole wycinka pierścienia o promieniu wewnętrznym r, grubości dr i kącie rozwarcia $d\alpha$ wynosi w przybliżeniu $rdrd\alpha$.

- Przykład: Obliczyć $\iint_D x dx dy$, gdzie

$$D = \left\{ (x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x \right\}$$

- Zapiszmy we współrzędnych biegunowych nierówność opisującą obszar:

$$(r \cos \alpha)^2 + (r \sin \alpha)^2 \leq 2r \cos \alpha$$

$$r^2 \leq 2r \cos \alpha$$

$$0 \leq r \leq 2 \cos \alpha$$

- Prawa strona musi być nieujemna, stąd

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

- Obszar całkowania jest opisany nierównościami

$$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq 2\cos\alpha.$$

- Funkcją podcałkową jest $f(x, y) = x = r\cos\alpha$.
- W takim razie całkę możemy obliczyć jako

$$\int_{\alpha=-\frac{\pi}{2}}^{\alpha=\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_{r=0}^{r=2\cos\alpha} (r\cos\alpha) \cdot r\,dr$$

- Przykład: Obliczyć $\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, gdzie

$$D = \left\{(x,y) : (x^2+y^2)^2 \leq x^2 - y^2; \quad x \geq 0\right\}$$

- Zapiszmy we współrzędnych biegunowych nierówność opisującą obszar:

$$((r\cos\alpha)^2 + (r\sin\alpha)^2)^2 \leq (r\cos\alpha)^2 - (r\sin\alpha)^2$$

$$r^4 \leq r^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$$

$$r^4 \leq r^2\cos 2\alpha$$

$$r^2 \leq \cos 2\alpha$$

$$r \leq \sqrt{\cos 2\alpha}$$

- Opisujemy we współrzędnych biegunowych obszar

$$D = \left\{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2; \quad x \geq 0\right\}$$

- Wiemy już, że

$$0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\alpha}$$

- Pozostało ustalić α:
  - $x \geq 0$, więc α musi być kątem z *I* lub *IV* ćwiartki.
  - Ponadto musi być $\cos 2\alpha \geq 0$, więc

$$-\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}.$$

- Ostatecznie nasz obszar możemy opisać tak:

$$-\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4},$$

$$0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\alpha}.$$

- Liczymy $\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}dxdy$, gdzie

$$D = \left\{(x,y) : (x^2+y^2)^2 \leq x^2 - y^2; \quad x \geq 0\right\}$$

- We współrzędnych biegunowych obszar jest taki:

$$-\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4},$$

$$0 \leq r \leq \sqrt{\cos 2\alpha}.$$

- Funkcja podcałkowa we współrzędnych biegunowych ma postać

$$x\sqrt{x^2+y^2} = r\cos\alpha\sqrt{r^2} = r^2\cos\alpha$$

- Ostatecznie całkę możemy zapisać tak:

$$\int_{\alpha=-\frac{\pi}{4}}^{\alpha=\frac{\pi}{4}} d\alpha \int_{r=0}^{r=\sqrt{\cos 2\alpha}} (r^2\cos\alpha)\cdot r\,dr$$