Wstęp do topologii

Rozwiązania niektórych zadań z list

LISTA 2

4. Dla przestrzeni $X = \mathbb{R}^2$ z metryką: a) euklidesową, b) „rzeka" wyznaczyć domknięcie, wnętrze, brzeg i pochodną podanych zbiorów:

$$A = \mathbb{Q} \times \mathbb{R},$$

$$B = \left\{ \left(x, \sin \frac{1}{x} \right) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

$$C = \{(x, y) : xy < 0, x \in \mathbb{Q}, y \notin \mathbb{Q}\}.$$

Rozwiązanie: W sumie mamy do rozpatrzenia sześć kombinacji zbioru i metryki. Ograniczę się do zamieszczenia szczegółowego rozwiązania dla zbioru A oraz samych odpowiedzi dla zbiorów B i C pozostawiając Państwu uzasadnienie tych odpowiedzi do samodzielnego przemyślenia. Zanim przejdziemy do badania przykładów, zwróćmy uwagę na pewne właściwości rozważanych metryk (warto spróbować je uzasadnić): ciąg $((x_n, y_n))$ jest zbieżny w metryce euklidesowej do (x, y) wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg liczbowy (x_n) jest zbieżny do x, a ciąg liczbowy (y_n) jest zbieżny do y. Z kolei w metryce „rzeka": jeśli $y \neq 0$, to ciąg jest zbieżny do (x, y) wtedy i tylko wtedy, gdy ciąg (y_n) jest zbieżny do y, a ciąg (x_n) jest od pewnego miejsca stały i równy x. Jeśli $y = 0$, to charakteryzacja zbieżności jest taka sama, jak w metryce euklidesowej. Ponadto zauważmy, że jeśli $y \neq 0$, a $\varepsilon < |y|$, to kula o środku (x, y) i promieniu ε jest odcinkiem $\{(x, y') : |y' - y| < \varepsilon\}$.

- **Zbiór A w metryce euklidesowej:** Domknięciem zbioru A jest cała płaszczyzna, ponieważ jeśli $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, to istnieje ciąg liczb wymiernych (x_n) zbieżny do x, a wtedy (sprawdzić!) ciąg $((x_n, y))$ (którego wyrazy wszystkie należą do A) zbiega do (x, y) w metryce euklidesowej. Z kolei wnętrze A jest zbiorem pustym, ponieważ jeśli $(x, y) \in A$, to dla każdego ε istnieje liczba niewymierna x', taka że $|x' - x| < \varepsilon$, a wtedy $d((x', y), (x, y)) < \varepsilon$. W takim razie dla żadnego punktu z A nie znajdziemy kuli o środku w tym punkcie zawartej całkowicie w A (a takie jest kryterium przynależności do wnętrza zbioru). Dalej, ponieważ brzeg zbioru to różnica między jego domknięciem a wnętrzem, to brzegiem zbioru A jest cała płaszczyzna. Pokazaliśmy też, że każdy element płaszczyzny jest punktem skupienia A, zatem $A^d = \mathbb{R}^2$.
- **Zbiór A w metryce „rzeka":** Z naszej charakteryzacji ciągów zbieżnych w metryce „rzeka" wynika, że jeśli $x \notin \mathbb{Q}$, to punkt (x, y) może być granicą ciągu elementów A tylko jeśli $y = 0$ (bo w przeciwnym razie odpowiednio dalekie elementy ciągu A musiałyby mieć pierwszą współrzędną równą x, a więc niewymierną, co jest niedozwolone). Z kolei punkt $(x, 0)$ jest punktem skupienia A dla każdego x, ponieważ jeśli (x_n) jest ciągiem liczb wymiernych zbieżnym do x, to ciąg $((x_n, 0))$ będzie w metryce „rzeka" zbieżny do $(x, 0)$ (ale jeszcze raz podkreślmy, że np. ciąg $((x_n, 1))$ nie będzie zbieżny do $(x, 1)$, choć byłby zbieżny w metryce euklidesowej). W takim razie $\overline{A} = A \cup \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Z naszych rozważań wynika, że jest to jednocześnie zbiór A^d. Dalej, niech $(x, y) \in A$ i zastanówmy się, kiedy (x, y) należy do wnętrza A. Aby tak było, pewna kula o środku w (x, y) musiałaby w całości zawierać się w A. Jeśli $y \neq 0$, to kula o promieniu mniejszym niż $|y|$ będzie podzbiorem A (przypomnijmy, że taka kula będzie pionowym odcinkiem przechodzącym przez (x, y)), czyli wtedy (x, y) należy do wnętrza A. Jeśli jednak $y = 0$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ będzie istniała liczba niewymierna x', taka że $|x' - x| < \frac{\varepsilon}{2}$, a wtedy punkt $(x', \frac{\varepsilon}{2})$ będzie należał do kuli o środku $(x, 0)$ i promieniu ε, a nie będzie należał do zbioru

A. W takim razie punkty o zerowej drugiej współrzędnej nie należą do wnętrza A i ostatecznie $\operatorname{Int} A = \{(x, y) : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R} \setminus 0\}$. W takim razie brzeg zbioru A jako różnica między domknięciem a wnętrzem ma postać $\partial A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$.

- **Zbiór B w metryce euklidesowej:** $\overline{B} = B^d = \partial B = B \cup \{(0, y) : y \in [-1, 1]\}$, $\operatorname{Int} B = \emptyset$,
- **Zbiór B w metryce „rzeka":** $\overline{B} = \partial B = B \cup \{(0, 0)\}$, $\operatorname{Int} B = \emptyset$, $B^d = \{(0, 0)\} \cup \left\{(\frac{1}{k\pi}, 0) : k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- **Zbiór C w metryce euklidesowej:** $\overline{C} = C^d = \partial C = \{(x, y) : xy \leq 0\}$, $\operatorname{Int} C = \emptyset$.
- **Zbiór C w metryce „rzeka":** $\overline{C} = C^d = \partial C = \{(x, y) : xy < 0, x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, $\operatorname{Int} C = \emptyset$.

6. Podać przykład zbioru A w przestrzeni metrycznej (X, d), takiego że zbiory A, ∂A i $\partial(\partial A)$ są wszystkie różne i niepuste lub uzasadnić, że taki przykład nie istnieje.

Rozwiązanie: Niech $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ w przestrzeni $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową. Wtedy $\overline{A} = [0, 1]$, bo dla każdej liczby z odcinka $[0, 1]$ istnieje ciąg liczb wymiernych z tego odcinka zbieżny do tej liczby w metryce euklidesowej. Z kolei $\operatorname{Int} A = \emptyset$, bo każda kula (czyli odcinek otwarty) zawiera punkty spoza zbioru A. Stąd $\partial A = [0, 1]$. Odcinek $[0, 1]$ jest domknięty, a jego wnętrzem jest odcinek $(0, 1)$, zatem $\partial(\partial A) = \{0, 1\}$.

Uwaga: Można pokazać (i polecam to jako zadanie), że zawsze $\partial(\partial(\partial(A))) = \partial(\partial(A))$. Aby to uzasadnić, warto zacząć od dowodu, że jeśli zbiór B jest domknięty, to $\partial(\partial(B)) = \partial(B)$.

8. Udowodnić, że podane warunki (w ustalonej przestrzeni metrycznej (X, d)) są równoważne:

   (a) Zbiór A jest brzegowy.

   (b) Zbiór $X \setminus A$ jest gęsty.

   (c) W każdym niepustym podzbiorze otwartym $U \subset X$ istnieją punkty spoza zbioru A.

Rozwiązanie: Załóżmy, że zachodzi warunek (a). Jeśli zbiór A jest brzegowy, to z definicji $\operatorname{Int} A$ jest zbiorem pustym. To jest równoważne stwierdzeniu, że żaden punkt x nie leży we wnętrzu A. To z kolei jest równoważne stwierdzeniu, że jeśli $x \in X$ i $\varepsilon > 0$, to kula otwarta $B(x, \varepsilon)$ zawiera jakiś spoza A. Ustalmy $x \in X$. Dla każdego $n \in \mathbb{N}$ istnieje $x_n \notin A$, taki żę $d(x, x_n) < \frac{1}{n}$. Ciąg (x_n) składa się z elementów z $X \setminus A$ i jest zbieżny do x. Skoro taki ciąg znajdziemy dla każdego $x \in X$, to $X \setminus A$ jest zbiorem gęstym i udowodniliśmy warunek (b).

Z kolei jeśli zachodzi warunek (b) i $U \subset X$ jest zbiorem otwartym, to niech $x \in U$. Istnieje takie $\varepsilon > 0$, że kula otwarta $B(x, \varepsilon)$ jest podzbiorem U. Z gęstości zbioru $X \setminus A$ istnieje ciąg (x_n) elementów $X \setminus A$, który zbiega do x. W takim razie dla odpowiednio dużych n mamy $d(x, x_n) < \varepsilon$, ale wtedy $x_n \in U$, czyli w U będą punkty spoza A i mamy własność (c).

Wreszcie załóżmy, że zachodzi warunek (c). Musimy pokazać, że $\operatorname{Int} A$ jest zbiorem pustym. Dla każdego $x \in A$ i każdego $\varepsilon > 0$ kula otwarta $B(x, \varepsilon)$ zawiera punkty spoza A (na mocy warunku (c)), więc nie może być podzbiorem A, stąd $x \notin \operatorname{Int} A$, czyli ostatecznie $\operatorname{Int} A$ jest zbiorem pustym i zbiór A jest brzegowy.

10. Podać przykład metryki d na przestrzeni $x = \mathbb{R}$, dla której podzbiór liczb wymiernych nie jest gęsty.

Rozwiązanie: jest to na przykład metryka dyskretna (czyli $d(x, y) = 0$, gdy $x = y$ i $d(x, y) = 1$, gdy $x \neq y$). W tej metryce każdy zbiór jest domknięty, więc domknięciem zbioru $\mathbb{Q}$ jest $\mathbb{Q}$, a nie $\mathbb{R}$ (czyli nie $\mathbb{Q}$ nie jest zbiorem gęstym).

LISTA 3

1. Wykazać, zę warunek Heinego istnienia granicy w punkcie jest równoważny z warunkiem Cauchy'ego (dla $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową).

   Rozwiązanie: Załóżmy, że $x \in \mathbb{R}$, a funkcja f jest określona w pewnym sąsiedztwie x, czyli na zbiorze $U \setminus \{x\}$, gdzie U jest przedziałem otwartym zawierającym x (oczywiście f może być określona na większym zbiorze, ale to jest minimum potrzebne do sformułowania pojęcia granicy). Równoważność definicji pokażemy za pomocą następujących dwóch implikacji:

   - Jeśli $a \in \mathbb{R}$ jest granicą f w punkcie x w sensie Cauchy'ego, to jest też granicą f w punkcie x w sensie Heinego.
   - Jeśli $a \in \mathbb{R}$ *nie jest* granicą f w punkcie x w sensie Cauchy'ego, to *nie jest* też granicą f w punkcie x w sensie Heinego.

   Załóżmy, że a jest granicą f w punkcie x w sensie Cauchy'ego i niech (x_n) będzie ciągiem elementów $U \setminus \{x\}$ zbieżnym do x. Ustalmy $\varepsilon > 0$. Z definicji Cauchy'ego wynika, że istnieje takie $\delta > 0$, że dla $x' \in U \setminus x$ warunek $|x - x'| < \delta$ pociąga za sobą nierówność $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$. Z kolei zbieżność ciągu liczbowego (x_n) do x oznacza, że istnieje takie N, że dla $N \geq n$ mamy $|x_n - x| < \delta$. W takim razie jednak dla $n \geq N$ mamy $|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon$, czyli ciąg liczbowy $(f(x_n))$ jest zbieżny do $f(x)$, a to oznacza, że a jest granicą f w punkcie x w sensie Heinego.

   Jeśli z kolei a nie jest granicą f w punkcie x w sensie Cauchy'ego, to (przez bezpośrednie zaprzeczenie definicji) wnioskujemy, że istnieje taki $\varepsilon > 0$, że dla każdego $\delta > 0$ istnieje taki $x' \in U \setminus x$, że $|x - x'| < \delta$, ale $|f(x) - f(x')| \geq \varepsilon$. Ustalmy taki ε i zauważmy, że dla każdego n istnieje takix_n, że $|x_n - x| < \frac{1}{n}$, ale $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$. W takim razie jednak ciąg (x_n) jest zbieżny do x, a ciąg $f(x_n)$ nie może być zbieżny do $f(x)$, czyli nie jest spełniona definicja Heinego.

2. Pokazać, że jeśli (X, d) jest przestrzenią metryczną oraz $f : X \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to zbiór wszystkich miejsc zerowych funkcji f jest domknięty w X.

   Rozwiązanie: To zadanie można rozwiązać na bardzo wiele sposobów. Najkrótsze rozwiązanie: z wykładu wiemy, że przeciwobraz zbioru domkniętego przez odwzorowanie ciągłe również jest zbiorem domkniętym. Zbiór miejsc zerowych f to inaczej zbiór $f^{-1}(\{0\})$, a $\{0\}$ jest (w metryce euklidesowej) zbiorem domkniętym, co kończy dowód.

   Drogą bardziej bezpośrednią: zbiór miejsc zerowych A będzie domknięty wtedy i tylko wtedy, gdy będzie zawierać wszystkie swoje punkty skupienia, czyli jeśli dla każdego ciągu (x_n) elementów A zbieżnego do $x \in X$ będziemy mieć $x \in A$. Niech zatem (x_n) będzie ciągiem miejsc zerowych f i niech $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. W takim razie z ciągłości f musi być $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, czyli $x \in A$.

3. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}$ z metryką euklidesową. Podać przykład funkcji ciągłej $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i zbioru otwartego $A \subset R$, dla których obraz $f(A)$ jest domknięty. Czy dla każdego zbioru domkniętego $B \subset \mathbb{R}$ obraz $f(B)$ jest zbiorem domkniętym?

   Rozwiązanie: Niech $f(x) = \sin x$ i niech $A = (-\pi, \pi)$. Zbiór A jest otwarty, natomiast $f(A) = [-1, 1]$, czyli jest to zbiór domknięty. Z kolei niech $g(x) = \operatorname{arctg} x$ i niech $B = \mathbb{R}$. Jest to zbiór domknięty, natomiast zbiór $g(B) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ nie jest domknięty.

Uwaga: Można natomiast pokazać, że jeśli zbiór B jest domknięty *i ograniczony* (czyli, językiem topologicznym, jeśli B jest zbiorem zwartym), to obraz B przez funkcję ciągłą będzie domknięty.

4. Ustalmy punkt $x_0 \in (X,d)$. Pokazać, że funkcja $f : X \to \mathbb{R}$ określona wzorem $f(x) = d(x,x_0)$ dla $x \in X$ jest ciągła.

Rozwiązanie: Niech $(x,y) \in X$. Zauważmy, że

$$d(x,x_0) \leq d(x,y) + d(y,x_0),$$

czyli

$$d(x,x_0) - d(y,x_0) \leq d(x,y).$$

Tak samo można pokazać nierówność $d(y,x_0) - d(x,x_0) \leq d(x,y)$, a razem te dwie nierówności dają

$$|d(x,x_0) - d(y,x_0)| \leq d(x,y).$$

W takim razie funkcja f spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1 (patrz zadanie 7), czyli jest ciągła.

5. Niech ℓ^1 oznacza przestrzeń, której punktami są wszystkie ciągi (x_n) o wyrazach rzeczywistych, takie że $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. Wprowadzamy metrykę

$$d\left((x_n),(y_n)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|.$$

Sprawdzić, że funkcja $r : \ell^1 \to \ell^1$ dana wzorem $r((x_n)) = (x_{n+1})$ jest ciągła w tej metryce.

Rozwiązanie: Dla jasności: jeśli $(x_n) = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, to $r((x_n)) = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$. W takim razie

$$d\left(r((x_n)), r((y_n))\right) = \sum_{n=2}^{\infty} |x_n - y_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n| = d\left((x_n),(y_n)\right),$$

a zatem funkcja r spełnia warunek Lipschitza, czyli jest ciągła.

6. Niech $X = C([0,1])$ będzie przestrzenią wszystkich funkcji ciągłych $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ z metryką supremum: $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$. Zbadać ciągłość następujących funkcji:

- $F : X \to X$, gdzie $F(f) = \varphi$, przy czym $\varphi(x) = f(1-x)$.

  Rozwiązanie: Tak się składa, że wszystkie funkcje z w zadaniu 6 spełniają warunek Lipschitza ze stałą 1, więc za każdym razem będziemy dowodzić ciągłości za pomocą tego warunku. W przypadku odwzorowania F mamy

  $$d(F(f),F(g)) = \sup_{x\in[0,1]} |f(1-x) - g(1-x)| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)| = d(f,g).$$

  Zauważmy na marginesie, że powyższy rachunek wskazuje nawet, że odwzorowanie F nigdy nie zmienia odległości między dwiema funkcjami, czyli jest *izometrią* (i że wszystkie izometrie są ciągłe, właśnie dlatego że spełniają warunek Lipschitza ze stałą 1).

- $G : X \to \mathbb{R}$, gdzie $G(f) = f(0)$.

Rozwiązanie: Dla $f, g \in X$ mamy

$$|G(f) - G(g)|) = |f(0) - g(0)| \le \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)| = d(f, g),$$

a więc odwzorowanie G spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1.

- $H : X \to X$, gdzie $H(f) = h$, przy czym $h(x) = \int_0^x f(t)dt$.

  Rozwiązanie: Dla $f, g \in X$ mamy

$$d(H(f), H(g)) = \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x f(t)dt - \int_0^x g(t)dt \right| = \sup_{x \in [0,1]} \left| \int_0^x (f(t) - g(t))dt \right| \le$$
$$\le \sup_{x \in [0,1]} \int_0^x |f(t) - g(t)| \, dt,$$

  bo wartość bezwzględna całki nie przekracza całki z wartości bezwzględnej. W ostatnim wyrażeniu funkcja podcałkowa jest nieujemna, więc całka będzie tym większa, im dłuższy przedział całkowania, stąd

$$\sup_{x \in [0,1]} \int_0^x |f(t) - g(t)| \, dt = \int_0^1 |f(t) - g(t)| \, dt \le \sup_{t \in [0,1]} |f(t) - g(t)| = d(f, g),$$

  czyli znowu nasze odwzorowanie spełnia warunek Lipschitza ze stałą 1.

- $K : X \to \mathbb{R}$, gdzie $K(f) = \int_0^1 f(t)dt$.

  Rozwiązanie: korzystamy z tych samych własności całek, co w poprzednim punkcie. Dla $f, g \in X$ mamy

$$|K(f) - K(g)| = \left| \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 g(t)dt \right| \le \int_0^1 |f(t) - g(t)| \, dt \le$$
$$\le \sup_{t \in [o,1]} |f(t) - g(t)| = d(f, g).$$

7. Niech (X, d_X) i (Y, d_Y) będą przestrzeniami metrycznymi. Mówimy, że funkcja $f : X \to Y$ spełnia warunek Lipschitza, gdy istnieje stała $C > 0$, taka że $d_Y(f(x), g(x)) \le C \cdot d_X(x, y)$ dla wszystkich $x, y \in X$. Pokazać, że każda taka funkcja jest ciągła. Podać przykład funkcji ciągłej, która nie spełnia warunku Lipschitza.

Rozwiązanie: Musimy pokazać, że f jest ciągła w każdym punkcie $x \in X$. Pokażemy ciągłość za pomocą definicji Cauchy'ego: niech $x \in X$ i $\varepsilon > 0$. Przyjmijmy $\delta = \frac{\varepsilon}{C}$. Wtedy jeśli $d_X(x, y) < \delta$, to

$$d_Y(f(x), f(y)) \le C \cdot d_X(x, y) < C \cdot \delta = C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon,$$

co kończy dowód. Funkcją ciągłą, która nie spełnia warunku Lipschitza, będzie np. $f(x) = x^2$ na $\mathbb{R}$. Zauważmy, że dla $x, y \in \mathbb{R}$ mamy $|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x + y| \, |x - y|$. W takim razie dla każdego $C > 0$ jeśli tylko $|x + y| > C$, to $|f(x) - f(y)| > C \, |x - y|$, czyli warunek Lipschitza nie będzie spełniony z żadną stałą.