Tadeusz Inglot

ALGEBRA LINIOWA Z GEOMETRIĄ

LISTA ZADAŃ NR 1

1. Dane są permutacje $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. Wyznaczyć permutacje $f \circ g^2$ oraz $f \circ g \circ f \circ g$.

2. Permutacja h nazywa się odwrotną do permutacji f, jeśli $f \circ h = h \circ f = e$, gdzie e jest permutacją identycznościową. Permutację odwrotną do f oznaczamy f^{-1}. Dla f, g z zadania 1 wyznaczyć f^{-1}, g^{-1} oraz $g \circ f^{-1} \circ g$.

3. Rozłożyć na cykle rozłączne permutacje

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 2 & 1 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 7 & 8 & 2 & 1 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Określić rzędy tych permutacji.

4. Nie wypisując w postaci dwuwierszowej, rozłożyć następujące permutacje (będące złożeniem cykli niekoniecznie rozłącznych) na cykle rozłączne

$$(1\,2)(3\,4\,5)(1\,2\,3)(5\,1\,2), \quad (3\,1\,4\,5)(1\,2\,3\,4)(3\,1\,4\,2)(1\,2\,3).$$

5. Udowodnić, że $(i_1\, i_2 ... i_k)^{-1} = (i_k\, i_{k-1} ... i_1)$.

6. Rozłożyć na transpozycje permutacje $h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 3 & 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ oraz f z zadania 1.

7. Udowodnić,że jeśli k jest liczbą nieparzystą, to kwadrat cyklu $(i_1\, i_2 ... i_k)$ jest cyklem, a jeśli $k > 2$ jest liczbą parzystą, to kwadrat ten jest złożeniem dwóch cykli.

8. Ile jest permutacji w S_n, które rozkładają się na k_j cykli j-wyrazowych ($j = 1, ..., s$, $k_1 + 2k_2 + ... + sk_s = n$)?

9. Wykazać, że każda transpozycja jest złożeniem nieparzystej ilości transpozycji liczb sąsiednich.

LISTA ZADAŃ NR 2

1. Rozwinąć potęgi
$$(2x+3y)^4, \qquad \left(\sqrt{x}+\frac{y}{2}\right)^6.$$

2. W rozwinięciu potęgi znaleźć wskazany składnik
$$\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^9, \quad \text{wprost proporcjonalny do } x,$$
$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x}\right)^{12}, \quad \text{wyraz stały.}$$

3. Korzystając ze wzoru Newtona, obliczyć
$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n},$$
$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-...+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n},$$
$$\binom{n}{0}2^n+\binom{n}{1}2^{n-1}+\binom{n}{2}2^{n-2}+...+\binom{n}{n-1}2+\binom{n}{n}.$$

4. Prostokąt podzielono na mniejsze prostokąty n liniami poziomymi oraz k liniami pionowymi przeprowadzonymi w równych odstępach. Iloma sposobami można dojść od jednego wierzchołka prostokąta do przeciwległego mu, posuwając się po prostych liniach poziomo i pionowo, tak, aby suma przebytych odcinków była równa sumie dwóch przyległych boków prostokąta?

5. Ile jest liczb czterocyfrowych, w których mogą się powtarzać dwukrotnie jedynie cyfry 1 i 2?

6. Iloma sposobami można rozdzielić cztery różne nagrody między trzech pracowników, jeżeli nawet wszystkie nagrody mogą przypaść jednemu pracownikowi?

7. Kostkę do gry rzucono 10 razy. Tak otrzymany zbiór (nieuporządkowany) liczb nazywamy losowaniem. Ile jest różnych losowań? W ilu losowaniach nie występuje liczba 6? W ilu występuje dokładnie 3 razy? W ilu co najmniej 3 razy? W ilu losowaniach występują tylko liczby parzyste?

8. Znaleźć liczbę rozwiązań w liczbach całkowitych nieujemnych a) równania $x_1+x_2+...+x_k=n$; b) nierówności $x_1+x_2+...+x_k\leq n$. Dwa rozwiązania różniące się porządkiem uważamy za różne.

LISTA ZADAŃ NR 3

1. Dane są wektory $u = (-2, 1)$, $v = (1, -2)$. Wyznaczyć i narysować wektory

$$u + v, \;\; \frac{1}{2}(u - v), \;\; 2v - u, \;\; \frac{u}{||u||}, \;\; -\frac{v}{||v||}.$$

2. Wektory u, v są przekątnymi równoległoboku. Wyrazić boki tego równoległoboku za pomocą u i v.

3. Sprawdzić, że

   (a) punkty $A(1, 3)$, $B(4, 7)$, $C(2, 8)$, $D(-1, 4)$ są kolejnymi wierzchołkami równoległoboku. Wyznaczyć kąt między jego przekątnymi,

   (b) punkty $A(-1, 0)$, $B(3, 4\sqrt{3})$, $C(7, 0)$, $D(3, -4\sqrt{3})$ są kolejnymi wierzchołkami rombu. Wyznaczyć jego kąty.

4. Napisać równania (ogólne i parametryczne) prostych

   (a) przechodzącej przez punkt $A(-1, 2)$ i równoległej do wektora $u = (3, -4)$,

   (b) przechodzącej przez punkt $B(3, -2)$ i prostopadłej do prostej $y = 2x - 1$.

5. Jakie jest wzajemne położenie podanych prostych? Jeśli przecinają się, to wyznaczyć kąt między nimi, a jeśli są równoległe, to ich odległość

$$2x + y = 3, \;\; \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases},$$

$$2x - y = 3, \;\; 3y = x.$$

6. Dla jakich wartości parametru m proste $x + my - 2m = 0$, $3x - (2 + m)y + m = 0$ są prostopadłe?

7. Punkt $A(2, 1)$ jest wierzchołkiem trójkąta ABC, punkt $D(0, 2)$ jest spodkiem wysokości CD wystawionej do boku AB, a prosta $x - y - 5 = 0$ zawiera bok BC. Obliczyć pole tego trójkąta.

LISTA ZADAŃ NR 4

1. Napisać równanie okręgu stycznego do osi Ox w punkcie $A(5,0)$ i odcinającego na osi Oy cięciwę długości 10.

2. Wyznaczyć równanie okręgu przechodzącego przez punkt $A(1,1)$ i stycznego do prostych $7x+y-3=0,\ \ x+7y-3=0$.

3. Dana jest elipsa $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Przez punkt $A(1,1)$ poprowadzić cięciwę tak, aby była w tym punkcie przepołowiona.

4. Ułożyć równania stycznych do elipsy $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{9}=1$ poprowadzonych z punktu $B(-6,3)$.

5. Na hiperboli $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ znaleźć punkt, który leży trzy razy bliżej jednej asymptoty niż drugiej.

6. Na hiperboli $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$ znaleźć punkty, w których styczne są nachylone do osi odciętych pod kątem $\frac{1}{3}\pi$.

7. Na paraboli $y^2=8x$ znaleźć punkt, którego odległość od ogniska jest równa 20.

8. Obliczyć parametr paraboli $y^2=2px$ wiedząc, że jest ona styczna do prostej $x-2y+5=0$.

9. Określić typy następujących krzywych

   (a) $x^2-2xy+2y^2-4x-6y+3=0$,
   (b) $x^2-2xy-2y^2-4x-6y+3=0$,
   (c) $x^2-2xy+y^2-4x-6y+3=0$,
   (d) $x^2+6xy+y^2+6x+2y-1=0$,
   (e) $3x^2-2xy+3y^2+4x+4y-4=0$,
   (f) $9x^2+6xy+y^2-6x+2y=0$.

LISTA ZADAŃ NR 5

1. Obliczyć wartość wyrażenia
$$\frac{(2-3i)^3-(1+i)^2(5-i)}{4-3i}, \quad \frac{(3+2i)^n}{(-2+3i)^{n+1}}.$$

2. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania
$$iz^2+(2+i)z+1-i=0, \quad 5z+|z^2|=\bar{z}-i, \quad z^2+iz+\frac{1}{2}=0.$$

3. Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiory spełniające warunki
$$|z-i|=|z+1|, \ 1<|z-2+i|\le 3, \ |2iz+1|>1, \ |z-i|+|z+1|=\sqrt{3}, \ \frac{z-1+i}{2+i}=\overline{\left(\frac{z-1+i}{2+i}\right)}.$$

4. Napisać w postaci trygonometrycznej liczby
$$-2, \ -1+i, \ \frac{\sqrt{3}-i}{4}, \ (\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{6}-\sqrt{2})i, \ 1-\cos\alpha+i\sin\alpha, \ \alpha\in[0,\pi], \ -1+i\operatorname{ctg}\beta, \ \beta\in[\pi,2\pi].$$

5. Wykazać, że dla dowolnych liczb zespolonych u, v spełniona jest równość
$$|u+v|^2+|u-v|^2=2(|u|^2+|v|^2).$$
Podać interpretację geometryczną tej równości.

6. Posługując się postacią trygonometryczną obliczyć wartości wyrażeń
$$\frac{(\sqrt{3}+i)(-1-i\sqrt{3})}{1+i}, \quad \frac{(1+i\sqrt{3})^{12}}{(1-i)^7}, \quad \frac{(1+i\operatorname{tg}\alpha)^5}{(1-i\operatorname{tg}\alpha)^5}, \quad \alpha\in(0,\frac{\pi}{2}).$$

7. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania
$$\bar{z}|z|^2=2iz^2, \quad z^7+2z^4+2z=0, \quad e^{z+i}=2(\sqrt{3}-i), \quad \sin 2z=-2i.$$

8. Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiory spełniające warunki
$$\arg(iz^3)=0, \quad Re\, z^3>0, \quad \arg(z+2-3i)=\frac{\pi}{6}.$$

9. Punkty $1-3i$ oraz $-1+5i$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu. Wyznaczyć pozostałe wierzchołki.

10. Korzystając ze wzoru de Moivre'a lub wzorów Eulera, wyrazić
a) $\cos 5x$ za pomocą $\sin x$ oraz $\cos x$,
b) $\cos^4 x$ przez funkcje trygonometryczne wielokrotności kąta x.

11. Obliczyć pierwiastki zespolone a) ósmego stopnia z liczby -1; b) czwartego stopnia z liczby i.

12. Obliczyć sumę kwadratów i iloczyn wszystkich pierwiastków zespolonych stopnia n z jedności.

LISTA ZADAŃ NR 6

1. Nie wykonując dzielenia, znaleźć resztę z dzielenia wielomianu $x^{100} + 2x^{40} - x + 1$ przez wielomian $x^3 + x^2 + x + 1$.

2. Jednym z pierwiastków wielomianu $x^4 - x^3 + x^2 + 9x - 10$ jest $z = 1 - 2i$. Znaleźć pozostałe pierwiastki i napisać rozkład tego wielomianu na czynniki rzeczywiste.

3. Znaleźć wielomian $w(x)$ o współczynnikach rzeczywistych możliwie najniższego stopnia spełniający warunki $w(1) = 2,\ w(i) = 10i,\ w(1-i) = 0$.

4. Liczby $1 + ai,\quad \sqrt{3} + i,\quad b + i\sqrt{3},\quad c + di$ są pierwiastkami wielomianu stopnia 4 o współczynnikach rzeczywistych. Znaleźć ten wielomian.

5. Jednym z pierwiastków wielomianu $x^4 + px^2 + q$ jest liczba $2 + i$, gdzie $p, q \in R$. Znaleźć p, q oraz pozostałe pierwiastki.

6. Wykazać, że wielomian $(x+1)^n + x^n + 1$ jest podzielny przez trójmian $x^2 + x + 1$ dla n parzystych niepodzielnych przez 6. Wywnioskować stąd, że liczba $1 + 3^{80} + 4^{80}$ jest podzielna przez 13.

7. Rozłożyć na czynniki w zbiorach Q, R, C wielomiany
$$3x^3 - 5x^2 - 5x - 1, \quad 3x^3 + 8x^2 + 10x + 4, \quad x^6 + x, \quad x^6 - 2x^4 + 4x^2 - 8.$$

8. Rozłożyć na czynniki rzeczywiste wielomiany
$$x^4 + 324, \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1.$$

9. Rozłożyć na ułamki proste rzeczywiste funkcje wymierne
$$\frac{4x-2}{x^3 - x^2 - 2x}, \quad \frac{9x^2 - 3x + 8}{x^3 - x^2 - x + 1}, \quad \frac{3}{x^4 + 5x^2 + 4}, \quad \frac{x+1}{(x^2+1)^2(x-1)}.$$

LISTA ZADAŃ NR 7

1. Metodą Sarrusa obliczyć wyznacznik $\begin{vmatrix} 1+i & 2 & -1 \\ 2i & 1-i & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

2. Stosując rozwinięcie Laplace'a oraz operacje elementarne, obliczyć wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

3. Obliczyć wyznacznik przez sprowadzanie do postaci trójkątnej

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

4. Obliczyć wyznaczniki

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ a & a & b & \dots & b \\ a & a & a & \dots & b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a & a & a & \dots & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1+t & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2+t & a_3 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & a_3+t & \dots & a_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n+t \end{vmatrix}.$$

5. Dla wyznacznika $J_n = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{vmatrix}$ wykazać, że $J_n = 3J_{n-1} - 2J_{n-2}$,

a następnie wyznaczyć J_n w jawnej postaci.

6. Rozwiązać równanie: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -1 & x & -3 & x \\ 1 & -2 & x & -4 \\ -1 & x & -x & x \end{vmatrix} = 0.$

7. Dane są macierze

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \\ -5 & -1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć wszystkie możliwe iloczyny par danych macierzy.

8. Obliczyć

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}^n, \quad \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}^n.$$

LISTA ZADAŃ NR 8

1. Wyznaczyć macierze odwrotne do podanych

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & 1 & \ldots & 1 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Wykazać, że $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ dla dowolnej macierzy nieosobliwej A.

3. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Znaleźć wszystkie macierze B stopnia 2 takie, że $AB = BA$.

4. Rozwiązać równanie macierzowe

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

5. Obliczyć wyznacznik oraz macierz odwrotną (o ile istnieje) do macierzy A spełniającej równanie $A^3 - A = 0$.

6. Znaleźć rząd macierzy $\begin{bmatrix} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & b \\ 1 & b & a & 1 \end{bmatrix}$ w zależności od parametrów rzeczywistych a, b.

7. Rozwiązać trzema sposobami układ równań (wzory Cramera, macierz odwrotna, metoda eliminacji Gaussa)

$$\begin{cases} x & -y & +z & = & -2 \\ -2x & +3y & -4z & = & 4 \\ -7x & +3y & -z & = & 5 \end{cases}.$$

8. Metodą eliminacji Gaussa rozwiązać układy

$$\begin{cases} & y & -z & +t & = & -3 \\ x & -2y & +3z & -4t & = & 4 \\ x & +3y & & -3t & = & 1 \\ & -7y & +3z & -t & = & 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x & +2y & -z & -t & = & 1 \\ x & +y & +z & +3t & = & 2 \\ 3x & +5y & -z & +t & = & a \end{cases} \quad \text{dla } a \in \{3, 4\}.$$

9. Rozwiązać układ $\begin{cases} x & +2y & -pz & -t & = & 1 \\ x & +y & +z & +3t & = & p \\ px & +5y & -5z & +t & = & 5 \end{cases}$ w zależności od parametru p.

10. Zbadać liczbę rozwiązań układu $\begin{cases} x & -2y & -z & = & 1 \\ 2x & +y & +az & = & 2 \\ bx & +2y & -z & = & 0 \\ 3x & -2y & +z & = & 1 \end{cases}$ w zależności od parametrów rzeczywistych a, b.

11. Ułożyć układ równań, którego zbiór rozwiązań jest postaci

$$\{(1 - t + 2s, 1 + 2t, -2 + s, t - s) : t, s \in R\}.$$

12. Znaleźć układ fundamentalny rozwiązań układu jednorodnego

$$\begin{cases} x & -3y & +2z & & = 0 \\ x & & & -t & = 0 \\ -x & -3y & +2z & +2t & = 0 \end{cases}.$$

LISTA ZADAŃ NR 9

1. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach $A(1,2,3)$, $B(3,1,0)$, $C(1,1,1)$.

2. Obliczyć objętość czworościanu o krawędziach $(1,2,3)$, $(3,1,-1)$, $(3,2,1)$.

3. Zbadać, czy punkty $A(1,3,0)$, $B(2,4,5)$, $C(3.5.9)$, $D(0,1,2)$ leżą na jednej płaszczyźnie.

4. Trójkąt ABC jest rozpięty na wektorach $\overrightarrow{AB}= (1,5,-3)$, $\overrightarrow{AC}= (-1,0,4)$. Obliczyć wysokość tego trójkąta opuszczoną na bok AB.

5. Dane są wartości trzech sił $F_1 = |\vec{F_1}| = 3\ N$, $F_2 = |\vec{F_2}| = 4\ N$, $F_3 = |\vec{F_3}| = 5\ N$. Jak powinny być skierowane w przestrzeni te siły, aby ich wypadkowa była wektorem zerowym?

6. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $A(1,2,3)$ i prostopadłej do płaszczyzn $6x - 12y + 3z = 0$, $3x + 2y - 6 = 0$.

7. Znaleźć równanie kierunkowe prostej przechodzącej przez początek układu i równoległej do płaszczyzn $6x - 12y + 3z = 0$, $3x + 2y - 6 = 0$. Obliczyć odległość tej prostej od każdej z danych płaszczyzn.

8. Napisać równanie kierunkowe prostej będącej dwusieczną kąta ostrego utworzonego przez proste $\dfrac{x+2}{3} = \dfrac{y-4}{-1} = \dfrac{z}{5}$, $\dfrac{x+2}{1} = \dfrac{y-4}{-5} = \dfrac{z}{3}$.

9. Zbadać, czy prosta $m : \begin{cases} 2x + y - z + 3 &= 0, \\ x - 2y + z - 5 &= 0, \end{cases}$ jest zawarta w płaszczyźnie $\pi : 5y - 3z + 13 = 0$.

10. Zbadać, czy proste $\dfrac{x-9}{4} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z}{1}$, $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+7}{9} = \dfrac{z-2}{2}$ są skośne. Jeśli tak, to obliczyć ich odległość.

11. Znaleźć punkt przebicia płaszczyzny

$$\pi : \begin{cases} x = & s + t, \\ y = & 1 + s + 2t, \\ z = & 3 + 2s + 4t, \end{cases}$$

przez prostą $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-4}{-1}$ oraz kąt nachylenia tej prostej do płaszczyzny π.

12. Obliczyć odległość punktu $P(0,1,-1)$ od prostej $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{3}$.

13. Napisać równanie kierunkowe rzutu prostokątnego prostej $\dfrac{x-9}{4} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z}{1}$ na płaszczyznę $6x - 12y + 3z = 0$.

14. Obliczyć objętość i pole powierzchni bryły ograniczonej płaszczyznami: $x - y = 1$, $x - y = 5$, $x + 2z = 0$, $x + 2z = 3$, $z = -1$, $z = 4$.

LISTA ZADAŃ NR 10

1. Dobrać liczby $p, q \in R$ tak, aby wektor $(2, 6, -6, 3) \in R^4$ był kombinacją liniową wektorów $(1, p, 0, 0),\ (1, 0, q, 1)$.

2. Zbadać liniową niezależność wektorów $(0, 1, 2),\ (1, i, -i),\ (i, 1, 1)$ w przestrzeni C^3.

3. Wektory u, v, w są liniowo niezależne. Zbadać liniową niezależność wektorów a) $u + v$, $v + w,\ w + u$; b) $u - v,\ v - w,\ w - u$.

4. Które z podzbiorów przestrzeni $R^4 = \{(x, y, z, t) : x, y, z, t \in R\}$ określonych poniższymi warunkami są podprzestrzeniami liniowymi
a) $x = z = 0$; b) $y = 1$; c) $x = 0$ lub $t = 0$; d) $x + y + z = 1$; e) $x - y < 0$; f) $|x| = |y| = |z|$; g) zbiór wektorów postaci $(a, a + 1, 0, 1 - a)$; h) zbiór wektorów postaci $(a, a+b, b, a-b)$; j) zbiór wektorów postaci $(a, ab, b, 0)$. W przypadku odpowiedzi pozytywnej podać wymiar oraz przykład bazy tej podprzestrzeni.

5. Wykazać, że $W = \{(x, y, z, t) : x = t, x - 3y + 2z = 0\} \in R^4$ jest podprzestrzenią liniową rozpiętą na wektorach $(0, 2, 3, 0),\ (3, 1, 0, 3)$. Dobrać bazę W tak, aby wektor $(1, 1, 1, 1) \in W$ miał wszystkie współrzędne równe 2.

6. Układ wektorów $(1, 1, 0, 0),\ (0, 1, 1, 0)$ uzupełnić do bazy przestrzeni R^4.

7. Wektor u ma w bazie $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$ przestrzeni V współrzędne $1, 2, ..., k$. Wyznaczyć współrzędne tego wektora w bazie $\{x_1, x_1 + x_2, ..., x_1 + x_2 + ... + x_k\}$.

8. Niech U, V będą podprzestrzeniami przestrzeni R^n. Wykazać, że $U \cap V$ jest podprzestrzenią liniową oraz $\dim U \cap V \geq \dim U + \dim V - n$. Podać interpretację geometryczną tej nierówności w przestrzeni R^3.

9. Określić wymiar podprzestrzeni R^5 określonych następująco

   a) $V = \text{lin}\{(1, 2, -1, 0, 1),\ (2, 0, 1, 1, -1),\ (1, 1, 0, -1, 0),\ (-1, 3, -3, 0, 3),\ (0, 1, 0, -4, 0)\}$,

   b) $W = \{(x, y, z, u, v) : x - z = 0,\ y + z + u - v = 0\}$.

   W każdym przypadku podać przykład bazy, w której współrzędne wektora $(1, 0, 1, -2, -1) \in V \cap W$ są kolejnymi liczbami naturalnymi.

10. Dla danych poprzedniego zadania wyznaczyć podprzestrzeń liniową $V \cap W$, jej wymiar i przykład bazy.

    Zbiór $R^n[x]$ wielomianów stopnia co najwyżej n można utożsamiać z przestrzenią liniową R^{n+1} przyjmując, że wielomianowi $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ odpowiada wektor $(a_n, a_{n-1}, ..., a_1, a_0) \in R^{n+1}$. W ten sposób zbiór wielomianów $R^n[x]$ jest przestrzenią wektorową wymiaru $n + 1$.

11. Wykazać, że wielomiany $\dfrac{x^k - 1}{x - 1}$, $k = 1, 2, ..., n + 1$, są liniowo niezależne. Przestawić wielomian $x^4 + x^2 + 1$ jako kombinację liniową tych wielomianów.

12. W przestrzeni $R^2[x]$ rozważamy zbiór U tych wielomianów, dla których liczba 1 jest pierwiastkiem. Wykazać, że U jest podprzestrzenią liniową. Wyznaczyć jej wymiar i podać przykład bazy.

LISTA ZADAŃ NR 11

1. Napisać macierz przekształcenia liniowego $T : R^4 \to R^4$ danego wzorem

$$T(x, y, z, t) = (x - 2y + 3z - 4t,\ 3x + 5z + 2t,\ x + y + z + 3t,\ 5x - y + 9z + t)$$

w bazie standardowej. Znaleźć jądro i obraz tego przekształcenia oraz ich wymiary oraz przykładowe bazy tych podprzestrzeni.

2. Znaleźć macierz przekształcenia liniowego $T(x, y, z) = (x + y - z, 2x - y + z)$ w bazach $v_1 = (1, 1, 0),\ v_2 = (1, 0, 1),\ v_3 = (0, 1, 1)$ oraz $w_1 = (1, 1)\ w_2 = (-1, 1)$.

3. Podać przykłady przekształcenia liniowego spełniającego warunki

   a) $A : R^4 \to R^4,\ A(1, 1, 1, 1) = (1, 1, 1, 1),\ \dim \operatorname{Ker} A = 3,$

   b) $B : R^4 \to R^4,\ \dim \operatorname{Ker} B = \operatorname{rz} B = 2,$

   c) $C : R^3 \to R^2,\ \operatorname{Ker} C = \{(x, y, z) = x + y + z = 0\},\ \operatorname{Im} C = \{(x, y) : x + 3y = 0\}.$

4. Przekształcenie liniowe $D :\ R^n[x] \longrightarrow R^n[x]$ dane wzorem $Dw(x) = w'(x)$ (pochodna wielomianu w). Znaleźć jądro, obraz i wartości własne tego przekształcenia oraz macierz w bazach standardowych.

5. Wykazać, że $\operatorname{rz}(AB) \le \min(\operatorname{rz} A, \operatorname{rz} B)$, gdzie A, B są macierzami.

6. Znaleźć wektory własne i wartości własne macierzy a) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.
Jaką postać mają macierze tych przekształceń w bazach wektorów własnych? Napisać macierze sprowadzające dane macierze do postaci diagonalnej.

7. Wykazać, że wektory własne przekształcenia liniowego $\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ tworzą bazę przestrzeni R^3. Wyznaczyć macierz A^{-1} korzystając z twierdzenia Cayleya-Hamiltona. Zauważyć, że macierz tego przekształcenia spełnia także równanie $x^2+3x-10 = 0$ i macierz odwrotną można wyznaczyć prościej. Jak?

8. Za pomocą sprowadzania do postaci diagonalnej wyznaczyć ogólną postać macierzy A^n, gdzie $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$.

9. Wyznaczyć macierz e^A, jeśli $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

10. Wykazać, że norma operatorowa macierzy A stopnia n dla normy supremum w przestrzeni R^n (tj. $||x||_\infty = \max_{1\le i\le n} |a_i|$) ma postać

$$||A||_\infty = \max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

11. Obliczyć normę spektralną macierzy $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ i porównać z innymi znanymi normami tej macierzy.

LISTA ZADAŃ NR 12

1. Sprawdzić, czy następujące funkcje są iloczynami skalarnymi w przestrzeni R^2
   a) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = 2x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_2$,
   b) $\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$.

2. Niech $\langle \cdot, \cdot \rangle$ będzie iloczynem skalarnym w przestrzeni wektorowej V. Wykazać, że jeśli $\langle u, v \rangle = \langle w, v \rangle$ dla wszystkich wektorów v, to $u = w$.

3. Znaleźć wartości parametru t, przy których wektory $x = (1, 1, t, 1, 1)$, $y = (0, 1, \sqrt{2}, 1, 0)$ tworzą kąt a) 120^o, b) 45^o.

4. Znaleźć współrzędne wektora $(1, 1, -2, 1) \in V = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_2 + a_3 + a_4 = 0\}$ w bazie ortogonalnej $x_1 = (1, 1, 0, -1)$, $x_2 = (-1, 0, 1, -1)$, $x_3 = (2, -2, 2, 0)$.

5. Wektor $u = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$ uzupełnić do bazy ortonormalnej podprzestrzeni
$$U = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) : a_1 = a_4, 2a_2 + 3a_3 - a_4 = 0\}.$$
   Otrzymany układ ortonormalny uzupełnić do bazy ortonormalnej przestrzeni E^4.

6. Znaleźć rzut ortogonalny wektora $v = (1, 0, 0, 0)$ na podprzestrzeń liniową $\mathrm{lin}\{(1, 1, 0, 0),\ (0, 2, -5, 0),\ (0, 0, 3, 4)\}$. Obliczyć cosinus kąta pomiędzy v i jego rzutem ortogonalnym.

7. Udowodnić metodę ortogonalizacji Grama-Schmidta (każdy układ ortonormalny w podprzestrzeni $V \in E^n$ można uzupełnić do bazy ortonormalnej V).

8. Obliczyć cosinus kąta pomiędzy wielomianami $u(x) = x^2 + x + 1$, $v(x) = x - 2$ w przestrzeni $R^2[x]$ z iloczynem skalarnym
$$\langle u, v \rangle = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)dx.$$