Wykład I, II: Liczby zespolone

Alicja Janic

Politechnika Wrocławska *alicja.janic@pwr.edu.pl*

21 października 2020

Płaszczyzna zespolona

Definicja

Liczbą zespoloną nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych, np. (x, y). Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez C. Zatem

$$\mathrm{C} \overset{def}{=} \{z = (x, y) : \; x, y \in \mathrm{R}\}$$

Liczbę zespoloną $z = (x, y)$ przedstawiamy na płaszczyźnie w postaci punktu (x, y) lub w postaci wektora o początku w punkcie $(0, 0)$ i końcu w punkcie (x, y). W tej interpretacji (geometrycznej) zbiór $\mathbb{C}$ nazywamy płaszczyzną zespoloną

Zbiór liczb rzeczywistych

Zbiór

$$\widetilde{\mathrm{R}} \stackrel{def}{=} \{z = (x, 0) : \ x \in \mathrm{R}\}$$

utożsamiamy ze zbiorem liczb R. Będziemy pisali x zamiast $(x, 0)$

Jednostka urojona

Definicja

Liczbę zespoloną $(0, 1)$ *nazywamy* **jednostką urojoną** *i oznaczamy ją przez* i,

$$i \stackrel{def}{=} (0, 1)$$

Jednostka urojona to taka liczba zespolona, że

$$i^2 = -1$$

Postać algebraiczna liczby zespolonej

Postać algebraiczna

Każdą liczbę zespoloną można jednoznacznie zapisać w postaci

$$z = x + iy, \quad \text{gdzie} \quad x, y \in \mathrm{R}$$

Nie każde przedstawienie liczby zespolonej w formie $x + iy$ jest jej postacią algebraiczną. Niezbędne jest dodanie warunku $x, y \in \mathrm{R}$.

- Liczbę x nazywamy **częścią rzeczywistą** liczby zespolonej z, co zapisujemy

$$Re\, z \stackrel{def}{=} x$$

- Liczbę y nazywamy **częścią urojoną** liczby zespolonej z, co zapisujemy

$$Im\, z \stackrel{def}{=} y$$

Przykłady

Obliczyć

- $(3i - 1) - (2 - 2i) =$
- $(1 - 2i)(-3 + 4i) =$
- $(x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$
- $\frac{4+5i}{1-3i} =$

Zauważ, że

- $Re\,(iz) = -Im\,z$
- $Im\,(iz) = Re\,z$

Równość liczb zespolonych w postaci algebraicznej

Równość liczb zespolonych

Dwie liczby zepolone z_1 i z_2 są równe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} Re\, z_1 = Re\, z_2 \\ Im\, z_1 = Im\, z_2 \end{cases}$$

Przykłady

Wyznaczyć wszystkie liczby zespolone spełniające warunki

- $z^2 + 4i = 0$
- $\frac{z+2}{i-1} = \frac{3z+i}{2+i}$

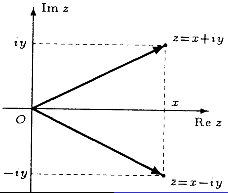
Sprzężenie liczby zespolonej

Definicja

Sprzężeniem liczby zespononej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathrm{R}$ nazywamy liczbę $\overline{z}$ określoną wzorem

$$\overline{z} \stackrel{def}{=} x - iy$$

Liczba sprzężona do liczby zespolonej jest jej obrazem w symetrii względem osi Re z



Własności sprzężenia liczb zespolonych

Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wówczas

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ $\qquad \overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ $\qquad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, jeśli $z_2 \neq 0$
- $z + \overline{z} = 2Re\, z$ $\qquad z - \overline{z} = 2i\, Im\, z$
- $\overline{(\overline{z})} = z$ $\qquad Im\, (\overline{z}) = -Im\, z$

Przykłady

Rozwiązać równania

- $z + i = \overline{z + i}$
- $z \cdot \overline{z} + (z - \overline{z}) = 3 + 2i$
- $z + \overline{z} + i\,(z - \overline{z}) = 5 + 3i$

Moduł liczby zespolonej

Definicja

Modułem liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathrm{R}$, nazywamy liczbę rzeczywistą $|z|$ określoną wzorem:

$$|z| \overset{def}{=} \sqrt{x^2 + y^2}$$

Moduł liczby zespolonej jest uogólnieniem wartości bezwzględnej liczby rzeczywistej. Geometrycznie moduł liczby zespolonej z jest odległością punktu z od początku układu współrzędnych. Moduł różnicy liczb zespolonych z_1, z_2 jest długością odcinka łączącego punkty z_1, z_2 płaszczyzny zespolonej,

Interpretacja geometryczna modułu

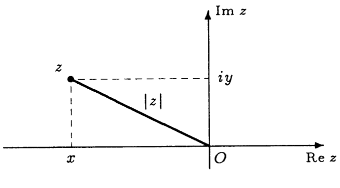


Figura: Interpretacja geometryczna modułu liczby zespolonej i modułu różnicy liczb zespolonych

Własności modułu liczby zespolonej

Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wówczas

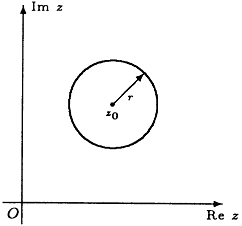
- $|\overline{z}| = |z| = |-z|$, $\quad z \cdot \overline{z} = |z|^2$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, jeśli $z_2 \neq 0$
- $|z^n| = |z|^n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$
- $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$, $\quad ||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 - z_2|$
- $|z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$, gdzie $n \in \mathbb{N}$
- $|Re\, z| \leqslant |z|$ $\quad |Im\, z| \leqslant |z|$

Przykłady

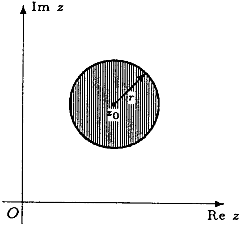
Obliczyć moduły podanych liczb zespolonych

- $(\overline{1+2i})(3-4i)$
- $\frac{4+i}{3+2i}$
- $(1+\sqrt{2}i)^4$
- $\frac{(3-\sqrt{3}i)^2}{(\sqrt{2}+2i)^3}$

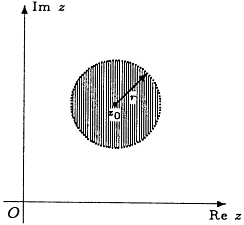
Interpretacje geometryczne równań i nierówności z modułem I



$$|z - z_0| = r$$

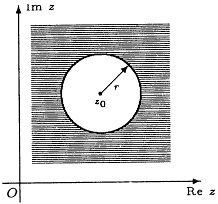


$$|z - z_0| \leqslant r$$

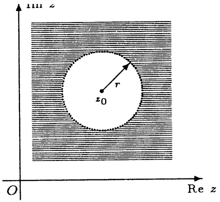


$$|z - z_0| < r$$

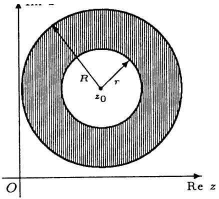
Interpretacje geometryczne równań i nierówności z modułem II



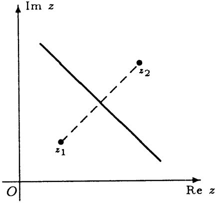
$|z - z_0| \geqslant r$



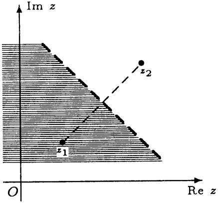
$|z - z_0| > r$



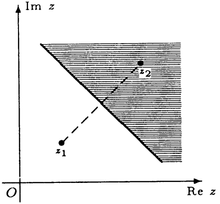
$r \leqslant |z - z_0| \leqslant R$



$|z - z_1| = |z - z_2|$



$|z - z_1| < |z - z_2|$



$|z - z_1| \geqslant |z - z_2|$

Przykłady

Korzystając z interpretacji geometrycznej modułu różnicy liczb zespolonych narysować zbiory liczb zespolonych spełniających podane warunki:

- $|2iz + 6| \leqslant 4$
- $\left|\frac{z-3}{z-3i}\right| > 1$
- $|\overline{z} + 2 - i| \leqslant |z|$
- $3|z - 1| \leqslant |z^2 - 1| \leqslant 6|z + 1|$

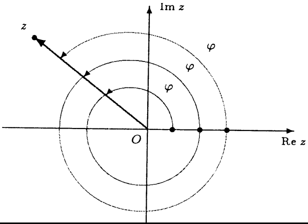
Argument liczby zespolonej

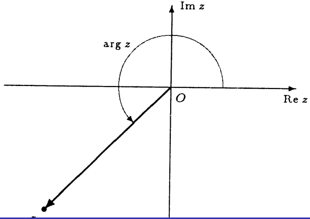
Argument

Argumentem liczby zespolonej $z = x + iy \neq 0$, gdzie $x, y \in \mathrm{R}$, nazywamy każdą liczbę ϕ spełniającą układ równań:

$$\begin{cases} \cos\phi = \frac{x}{|z|} \\ \sin\phi = \frac{y}{|z|} \end{cases}$$

Przyjmujemy, że argumentem liczby $z = 0$ jest każda liczba $\phi \in \mathrm{R}$





Argument i argument główny liczby zespolonej

Argumenty liczby zespolonej są miarami kąta zorientowanego utworzonego przez dodatnią część osi rzeczywistej i wektor wodzący tej liczby. Argument główny liczby zespolonej jest najmniejszą nieujemną miarą tego kąta.

Argument główny

Argumentem głównym liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy argument ϕ tej liczby spełniający nierówności $0 \leqslant \phi < 2\pi$

Przyjmujemy, że argumentem głównym liczby $z = 0$ jest 0. Argument główny liczby zespolonej z oznaczamy przez *arg* z. Każdy argument ϕ liczby zespolonej $z \neq 0$ ma postać

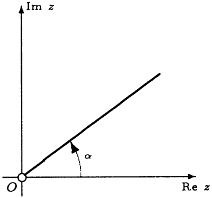
$$\phi = arg\ z + 2k\pi, \qquad \text{gdzie} \qquad k \in Z$$

Przykłady

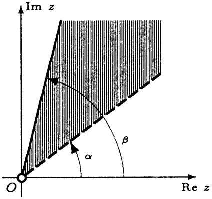
Znaleźć argumenty główne podanych liczb zespolonych

- $z = 2$
- $z = i$
- $z = -\pi$
- $z = 3 - 3i$
- $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

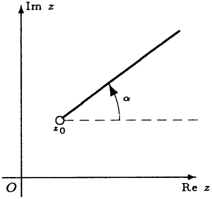
Interpretacje geometryczne równań i nierówności z argumentem



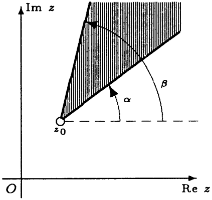
$\arg z = \alpha$



$\alpha < \arg z \leqslant \beta$



$\arg\,(z - z_0) = \alpha$



$\alpha \leqslant \arg\,(z - z_0) \leqslant \beta$

Własności argumentu liczby zespolonej

Niech $z \neq 0$ będzie dowolną liczbą zespoloną. Wtedy

- $arg\ (\overline{z}) = 2\pi - arg\ z$
- $arg\ \left(\frac{1}{z}\right) = 2\pi - arg\ z$
- $arg\ (-z) = \begin{cases} arg\ z + \pi, & \text{gdy} \quad 0 \leqslant arg\ z < \pi \\ arg\ z - \pi, & \text{gdy} \quad \pi \leqslant arg\ z < 2\pi \end{cases}$

Przykłady

Narysować zbiory liczb zespolonych, które spełniają podane warunki:

- $\frac{\pi}{4} < arg\ (\overline{z}) \leqslant \frac{3\pi}{4}$
- $arg\ \left(\frac{1}{z+i}\right) = \frac{5\pi}{6}$
- $\frac{\pi}{6} \leqslant arg\ (2 + i - z) \leqslant \pi$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Postać trygonometryczna

Każdą liczbę zespoloną z można przedstawić w postaci:

$$z = r(\cos\phi + i\sin\phi),$$

gdzie $r \geqslant 0$ oraz $\phi \in \mathrm{R}$. Liczba r jest wówczas modułem liczby z, a ϕ jednym z jej argumentów

Równość liczb zespolonych

Liczby zespolone $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$r_1 = r_2 \qquad \text{oraz} \qquad \phi_1 = \phi_2 + 2k\pi \qquad \text{dla} \qquad k \in \mathrm{Z}$$

Mnożenie, dzielenie i potęgowanie liczb zespolonych

Mnożenie, dzielenie i potęgowanie

Niech $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, $z_1 = r_1(\cos\phi_1 + i\sin\phi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\phi_2 + i\sin\phi_2)$. Wtedy

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\phi_1 + \phi_2) + i\sin(\phi_1 + \phi_2)]$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\phi_1 - \phi_2) + i\sin(\phi_1 - \phi_2)]$, o ile $z_2 \neq 0$
- $z^n = r^n[\cos n\phi + i\sin n\phi]$, gdzie $n \in N$

Przy mnożeniu liczb zespolonych ich moduły mnożymy, a argumenty dodajemy, przy dzieleniu liczb zespolonych ich moduły dzielimy, a argumenty odejmujemy. Równość (3) nosi nazwę wzoru de Moivre'a

Inne działania na liczbach zespolonych

Inne działania

Niech $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, gdzie $r \geqslant 0$ oraz $\phi \in$ R. Wówczas

- $\overline{z} = r[\cos(-\phi) + i\sin(-\phi)]$
- $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}[\cos(-\phi) + i\sin(-\phi)], \qquad$ o ile $z \neq 0$
- $-z = r[\cos(\phi + \pi) + i\sin(\phi + \pi)]$

Przykłady

Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć

- $(\sqrt{3} - i)^{60}$
- $\frac{(\sqrt{2}i - \sqrt{2})^{44}}{(1+i)^{10}}$

Znaleźć zbiory liczb zespolonych z spełniających podane warunki:

- $z^3 = -\overline{z}$
- $\overline{z} \cdot z^4 = \frac{1}{z}$

Przykłady

Naszkicować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane nierówności:

- $Re\ \left[(i-1)z^3\right] \geqslant 0$
- $Im\ z^4 > Re\ \left[(\overline{z})^4\right]$

O argumentach głównych iloczynu, potęgi oraz ilorazu

Argumenty iloczynu, potęgi oraz ilorazu

Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

- $arg\ (z_1 z_2) = arg\ z_1 + arg\ z_2 + 2k\pi$ dla $k = 0$ lub $k = -1$
- $arg\ (z^n) = n \cdot arg\ z + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z}$
- $arg\ \left(\frac{z_1}{z_2}\right) = arg\ z_1 - arg\ z_2 + 2k\pi$ dla $k = 0$ lub $k = 1$, o ile $z_2 \neq 0$

Przykłady

Naszkicować zbiory liczb zespolonych z spełniających podane nierówności:

- $arg\,[(1+i)z] = \frac{3\pi}{2}$
- $\frac{\pi}{4} < arg\,\frac{i}{z} \leqslant \frac{\pi}{2}$
- $arg\,\left(z^4\right) = \pi$
- $arg\,\left(z^3\right) < \frac{\pi}{2}$

Przykłady

Obliczyć argument główny podanych liczb zespolonych

- $\frac{(1-i\sqrt{3})^5(2+2i)^3}{(1-i)^7}$
- $\frac{(-\sqrt{3}+i)^4(-1-i)^9}{(2+2\sqrt{3}i)^5}$

Postać wykładnicza liczby zespolonej

Symbol $e^{i\phi}$

Dla $\phi \in R$

$$e^{i\phi} = \cos\phi + i\sin\phi$$

Zauważ, że $\left|e^{i\phi}\right| = 1$ oraz $arg\left(e^{i\phi}\right) = \phi + 2k\pi$ dla pewnego $k \in Z$

Postać wykładnicza

Każdą liczbę zespoloną z można zapisać w postaci wykładniczej, tj. w postaci

$$z = re^{i\phi},$$

gdzie $r \geqslant 0$ oraz $\phi \in R$. Liczba r jest wówczas modułem liczby z, a ϕ jej argumentem

Pierwiastek z liczby zespolonej

Definicja

Pierwiastkiem stopnia $n \in \mathbb{N}$ z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w spełniającą równość:

$$w^n = z$$

Zbiór pierwiastków stopnia n z liczby zespolonej z oznaczamy przez $\sqrt[n]{z}$

w R		w C
$\sqrt{1} = 1$		$\sqrt{1} = \{-1, 1\}$
$\sqrt[4]{1} = 1$		$\sqrt[4]{1} = \{1, i, -1, -i\}$
$\sqrt{-1}$	nie istnieje	$\sqrt{-1} = \{i, -i\}$

Wzór na pierwiastki z liczby zespolonej

Wzór I

Każda liczba zespolona $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, gdzie $r > 0$ oraz $\phi \in R$, ma dokładnie n pierwiastków stopnia n. Zbiór tych pierwiastków ma postać:

$$\sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1, ..., z_{n-1}\}$$

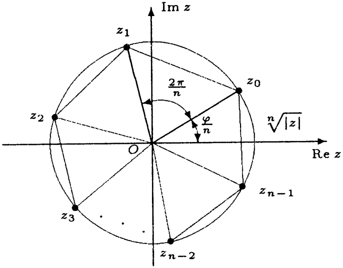
gdzie $\quad z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\right)$ dla $k = 0, 1, ..., n-1$

Wzór II

Ponadto dla $k = 0, 1, ..., n-2$ prawdziwa jest zależność:

$$z_{k+1} = z_k\left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

Interpretacje geometryczne zbioru pierwiastków



Zbiór pierwiastków stopnia $n \geqslant 3$ pokrywa się ze zbiorem wierzchołków n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu $\sqrt[n]{r}$ i środku w początku układu współrzędnych. Jeden z wierzchołków tego wielokąta jest w punkcie $z_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\phi}{n} + i\sin\frac{\phi}{n}\right)$ a kąty między promieniami wodzącymi kolejnych wierzchołków są równe $2\pi/n$

Przykłady

Obliczyć i narysować podane pierwiastki z liczb zespolonych:

- $\sqrt[3]{8i}$
- $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$
- $\sqrt[6]{-27}$
- $\sqrt[8]{1}$

Przykłady

Znaleźć wszystkie rozwiązania podanych równań

- $z^3 = (1-i)^3$
- $(z-i)^4 = (iz+2)^4$
- $z^6 = (1+2i)^{12}$