Wykład IX-X: Układy równań liniowych

Alicja Janic

Politechnika Wrocławska *alicja.janic@pwr.edu.pl*

06 grudzień 2020

Układy równań liniowych

Definicja

Układem m równań liniowych z n niewiadomymi $x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ nazywamy układ równań postaci:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m, \end{array}\right.$$

gdzie $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$ dla $1 \leqslant i \leqslant m$ oraz $1 \leqslant j \leqslant n$

Rozwiązaniem układu równań liniowych nazywamy ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ liczb rzeczywistych spełniających ten układ. Układ równań, który nie ma rozwiązania, nazywamy układem sprzecznym

Podstawowe określenia

Postać macierzowa

Układ równań liniowych można zapisać w postaci macierzowej:

$$AX = B, \quad \text{gdzie}$$

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Macierz A nazywamy macierzą główną układu równań liniowych, macierz X macierzą (kolumną) niewiadomych, a B macierzą (kolumną) wyrazów wolnych

Podstawowe określenia

Układ jednorodny i niejednorodny

- Układ równań liniowych postaci
$$AX = 0,$$
gdzie A jest macierzą wymiaru $m \times n$, natomiast 0 jest macierzą zerową wymiaru $m \times 1$, nazywamy układem jednorodnym
- Układ równań liniowych postaci
$$AX = B,$$
w którym B jest macierzą niezerową nazywamy układem niejednorodnym. Jednym z rozwiązań układu jednorodnego $AX = 0$ jest macierz zerowa

Wzór Cramera

Układ Cramera

Układem Cramera nazywamy układ równań liniowych

$$AX = B$$

w którym A jest macierzą kwadratową nieosobliwą

Twierdzenie

Układ Cramera $AX = B$ ma dokładnie jedno rozwiązanie. Rozwiązanie to jest określone wzorem:

$$X = \frac{1}{det\ A} \begin{bmatrix} det\ A_1 \\ det\ A_2 \\ \vdots \\ det\ A_n \end{bmatrix},$$

gdzie n oznacza stopień macierzy A, natomiast A_j oznacza macierz A, w której j - tą kolumnę zastąpiono kolumną wyrazów wolnych B

Zasada tworzenia macierzy A_j we wzorach Cramera

kolumna wyrazów wolnych

$$A_j \overset{def}{=\!=} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

j-ta kolumna macierzy A

Przykłady

Korzystając ze wzorów Cramera znaleźć rozwiązanie układu równań:

$$\begin{cases} & y & -3z & +4t & = & 0, \\ x & & -2z & & = & 0, \\ 3x & +2y & & -5t & = & 2, \\ 4x & & -5z & & = & 0 \end{cases}$$

Układ Cramera

Metoda macierzy odwrotnej

Rozwiązanie układu Cramera $AX = B$ jest określone wzorem:

$$X = A^{-1}B$$

Rząd macierzy

Minor macierzy

Niech A będzie dowolną macierzą wymiaru $m \times n$ i niech k będzie liczbą naturalną mniejszą lub równą od mniejszej z liczb m, n. Minorem stopnia k macierzy A nazywamy wyznacznik utworzony z elementów tej macierzy stojących na przecięciu dowolnie wybranych k wierszy i k kolumn.

Rząd macierzy

Rzędem macierzy nazywamy największy stopień jej niezerowego minora. Rząd macierzy A oznaczamy przez $rz\ A$. Przyjmujemy, że rząd dowolnej macierzy zerowej jest równy 0

Przykłady

Korzystając z definicji znaleźć rzędy podanych macierzy:

- $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{bmatrix}$
- $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

Rząd macierzy

Własności rzędu macierzy

- Rząd macierzy A wymiaru $m \times n$ spełnia nierówności:

$$0 \leqslant rz\ A \leqslant min(m, n)$$

- Rząd macierzy nieosobliwej jest równy jej stopniowi
- Rząd macierzy transponowanej jest równy rzędowi macierzy wyjściowej

$$rz\ A = rz\ A^T$$

- Rząd macierzy diagonalnej jest równy liczbie jej niezerowych elementów

Rząd macierzy

Macierz schodkowa

Macierz nazywamy schodkową, gdy pierwsze niezerowe elementy (tzw. schodki) w kolejnych niezerowych wierszach tej macierzy znajdują się w kolumnach o rosnących numerach

Twierdzenie

Rząd macierzy schodkowej jest równy liczbie jej niezerowych wierszy tj. liczbie schodków

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

O operacjach nie zmieniających rzędu macierzy

Twierdzenie

Podane poniżej operacje elementarne na macierzy nie zmieniają jej rzędu

- *zamiana między sobą dwóch dowolnych wierszy (kolumn)*
- *pomnożenie dowolnego wiersza (kolumny) przez liczbę różną od zera*
- *dodanie do ustalonego wiersza (ustalonej kolumny) sumy innych wierszy (kolumn) pomnożonych przez dowolne stałe*

Tezy obu twierdzeń znacznie ułatwiają wyznaczanie rzędów macierzy. Wystarczy przekształcić je do postaci schodkowej

Przykłady

Sprowadzając podane macierze do postaci schodkowej wyznaczyć ich rzędy:

- $$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Przykłady

- $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Twierdzenie Kroneckera - Capellego

Twierdzenie

Układ równań liniowych $AX = B$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy rząd macierzy A jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej $[A|B]$ tego układu $rz\, A = rz\, [A|B]$

O liczbie rozwzązań układu równań liniowych

Niech $AX = B$ będzie układem równań z n niewiadomymi

- Jeżeli $rz\, A \neq rz\, [A|B]$, to układ nie ma rozwiązania (**sprzeczny**)
- Jeżeli $rz\, A = rz\, [A|B] = n$, to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie (**oznaczony**)
- Jeżeli $rz\, A = rz\, [A|B] < n$, to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od $n - r$ parametrów (**nieoznaczony**)

Przykłady

W podanych układach równań określić (nie rozwiązując ich) liczby rozwiązań oraz liczby parametrów:

- $$\begin{cases} x - y + 2z - 3t = 2, \\ 2x + y - z + 4t = 1, \\ 4x - y + 3z - 2t = 5 \end{cases}$$

Przykłady

- $$\begin{cases} 4x & -y & +z & = & 3, \\ 2x & +3y & -z & = & 5, \\ 2x & -4y & +2z & = & 2 \end{cases}$$

Przykłady

- $$\begin{cases} x & -2y & +3z & = & -7, \\ 3x & +y & +4z & = & 5, \\ 2x & +3y & +z & = & 12, \\ 2x & +5y & +z & = & 1 \end{cases}$$

Przykłady

Określić liczbę rozwiązań w podanych układach równań w zależności od parametru p

- $$\begin{cases} x + py - z = 1, \\ 2x - y + pz = 0, \\ x + 10y - 6z = p \end{cases}$$

Przykłady

- $$\begin{cases} x & +2y & -z & = & 3, \\ 2x & -3y & +z & = & 1, \\ 8x & -5y & +z & = & p, \\ x & +y & -z & = & 0 \end{cases}$$

Dowolne układy równań liniowych

O równoważnym przekształcaniu układów równań

Podane poniżej operacje na wierszach macierzy rozszerzonej $[A|B]$ układu równań liniowych $AX = B$ przekształcają go na układ równoważny:

- zamiana wierszy: $w_i \longleftrightarrow w_j$
- mnożenie wiersza przez stałą różną od zera: $cw_i, \quad$ gdzie $c \neq 0$
- dodanie do wyrazów ustalonego wiersza odpowiadających im wyrazów innego wiersza pomnożonych przez stałą: $w_i + cw_j$,
- skreślenie wiersza złożonego z samych zer: w_i
- skreślenie jednego z wierszy równych lub proporcjonalnych: $w_i \sim w_j$

Metoda eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa

Niech $AX = B$ będzie układem równań liniowych, gdzie A jest macierzą wymiaru $m \times n$. Wówczas układ ten rozwiązujemy następująco:

- budujemy macierz rozszerzoną układu $[A|B]$

$$[A|B] = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & & x_n \end{array}}^{\text{niewiadome}} \\ \begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \end{array};$$

Metoda eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa

- na macierzy rozszerzonej dokonujemy równoważnych przekształceń układu sprowadzając ją do postaci $[A'|B']$

$$[A'|B'] = \begin{array}{c} \overbrace{x'_1 \quad x'_2 \quad \cdots \quad x'_r}^{\textbf{niewiadome}} \quad \overbrace{x'_{r+1} \quad \cdots \quad x'_n}^{\textbf{parametry}} \\ \left[\begin{array}{cccc:ccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & s_{1\,r+1} & \cdots & s_{1n} & z_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & s_{2\,r+1} & \cdots & s_{2n} & z_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & s_{r\,r+1} & \cdots & s_{rn} & z_r \\ \hdashline 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & z_{r+1} \end{array}\right] \end{array},$$

Przykłady

Rozwiązać podane układy równań metodą eliminacji Gaussa:

- $$\begin{cases} x & +6y & -z & = & 0, \\ -x & -4y & +5z & = & 6, \\ 3x & +17y & & = & 2, \\ 2x & +13y & 5z & = & 8 \end{cases}$$

Przykłady

Rozwiązać podane układy równań metodą eliminacji Gaussa:

- $\begin{cases} x + 2y + 3z - t = -1, \\ 3x + 6y + 7z + t = 5, \\ 2x + 4y + 7z - 4t = -6 \end{cases}$

Przykłady

Rozwiązać podane układy równań metodą eliminacji Gaussa:

- $$\begin{cases} x & -y & -2z & +2t & = & -2, \\ 5x & -3y & -z & +t & = & 3, \\ 2x & +y & -z & +t & = & 1, \\ 3x & -2y & +2z & -2t & = & -4 \end{cases}$$