Wykład XI-XIII: Geometria analityczna w przestrzeni

Alicja Janic

Politechnika Wrocławska *alicja.janic@pwr.edu.pl*

17 grudzień 2020

Przestrzeń R^3

Definicja

Przestrzenią R^3 nazywamy zbiór wszystkich uporządkowanych trójek (x, y, z) liczb rzeczywistych:

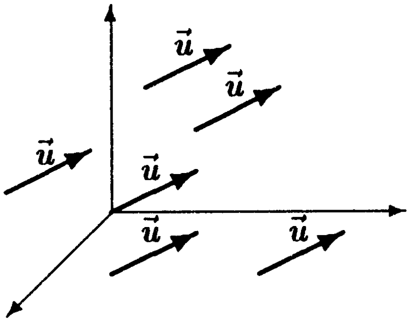
$$\mathrm{R}^3 \stackrel{def}{=} \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathrm{R}\}$$

Uwaga: Przestrzeń R^3 będziemy interpretować geometrycznie na trzy sposoby, tzn. jako:

- zbiór wszystkich punktów $P = (x, y, z)$ w przestrzeni
- zbiór wszystkich wektorów zaczepionych $\vec{a} = \overrightarrow{OP}$ mających wspólny początek $O = (0, 0, 0)$, a końce w punktach $P = (x, y, z)$
- zbiór wszystkich wektorów swobodnych w przestrzeni

Wektor swobodny

Przez wektor swobodny $\vec{u}$ rozumiemy tutaj zbiór wszystkich wektorów zaczepionych w różnych punktach, które mają ten sam kierunek, zwrot oraz długość co wektor $\vec{u}$

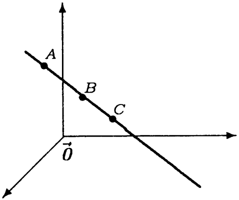


Rys. 5.1.3. Wektory swobodne.

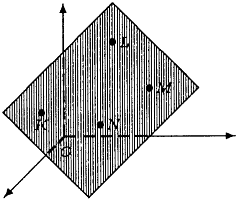
Punkty współliniowe i współpłaszczyznowe

Punkty współliniowe i współpłaszczyznowe

- Mówimy, że punkty A, B, C przestrzeni R^3 są współliniowe, gdy istnieje prosta, do której należą te punkty
- Mówimy, że punkty K, L, M, N przestrzeni R^3 są współpłaszczyznowe, gdy istnieje płaszczyzna, do której należą te punkty



Rys. 5.1.4. Punkty współliniowe

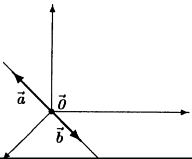


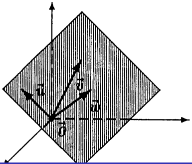
Rys. 5.1.5. Punkty współpłaszczyznowe

Wektory współliniowe i współpłaszczyznowe

Wektory współliniowe i współpłaszczyznowe

- Mówimy, że wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ są współliniowe, gdy istnieje prosta, w której zawarte są te wektory. Wektory współliniowe będziemy nazywać także wektorami równoległymi; piszemy wtedy $a||b$. Wektor $\vec{0}$ jest równoległy do dowolnego wektora
- Mówimy, że wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ są współpłaszczyznowe, gdy istnieje płaszczyzna, w której zawarte są te wektory. Wektor $\vec{0}$ i dwa dowolne wektory są współpłaszczyznowe.





Działania na wektorach

Działania na wektorach

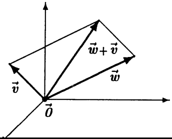
Niech $\vec{w} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$

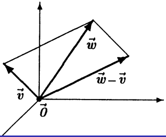
- Sumę wektorów $\vec{w}$ i $\vec{v}$ określamy wzorem:

$$\vec{w} + \vec{v} \stackrel{def}{=} (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$$

- Różnicę wektorów $\vec{w}$ i $\vec{v}$ określamy wzorem:

$$\vec{w} - \vec{v} \stackrel{def}{=} (x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2)$$





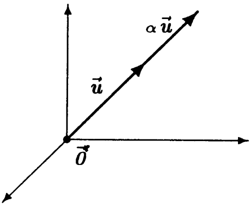
Działania na wektorach

Działania na wektorach

Niech $\vec{u} = (x, y, z)$ oraz niech $\alpha \in$ R

- Iloczyn wektora $\vec{u}$ przez liczbę rzeczywistą α określamy wzorem:

$$\alpha\vec{u} \stackrel{def}{=} (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$



Rys. 5.1.10. Iloczyn wektora przez liczbę.

Warunki równoległości i współpłaszczyznowości

Warunki równoległości wektorów

- Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby rzeczywiste $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ takie, że

$$|\alpha| + |\beta| > 0 \quad \text{oraz} \quad \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$$

Jeżeli $\vec{a} \neq \vec{0}$ to wektory $\vec{a}, \vec{b}$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba $t \in \mathrm{R}$ taka, że $\vec{b} = t\vec{a}$

Warunki równoległości i współpłaszczyznowości

Warunki współpłaszczyznowości wektorów

- Wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby rzeczywiste $\alpha, \beta, \gamma \in$ R takie, że

$$|\alpha| + |\beta| + |\gamma| > 0 \quad \text{oraz} \quad \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

Jeżeli $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ to wektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ są współpłaszczyznowe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją liczby $s, t \in$ R takie, że $\vec{c} = s\vec{a} + s\vec{b}$

Własności działań na wektorach

Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ będą dowolnymi wektorami swobodnymi w R^3 oraz niech $\alpha, \beta \in R$. Wtedy:

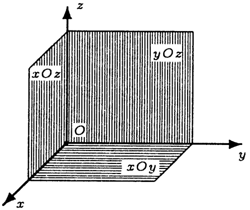
Własności działań na wektorach

- dodawanie wektorów jest działaniem przemiennym: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- dodawanie wektorów jest działaniem łącznym: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- wektor $\vec{0}$ jest elementem neutralnym dodawania: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
- wektor $-\vec{u}$ jest elementem przeciwnym do wektora $\vec{u}$: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
- $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$ $\qquad (\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$
- $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$ $\qquad \alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

Układ współrzędnych w przestrzeni

Definicja

Układem współrzędnych w przestrzeni nazywamy trzy ustalone proste x, y, z przecinające się w jednym punkcie 0, które są wzajemnie prostopadłe. Taki układ współrzędnych oznaczamy przez $Oxyz$. Proste Ox, Oy, Oz nazywamy osiami, a płaszczyzny xOy, yOz, xOz płaszczyznami układu współrzędnych

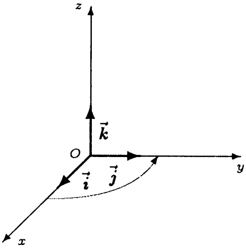


Rys. 5.1.14. Układ współrzędnych w przestrzeni.

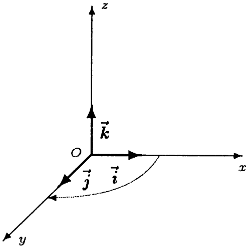
Orientacja układu współrzędnych w przestrzeni

Definicja

W zależności od wzajemnego położenia osi Ox, Oy, Oz układu współrzędnych wyróżniamy dwie jego orientacje: układ prawoskrętny i układ lewoskrętny



Rys. 5.1.15. Układ prawoskrętny.



Rys. 5.1.16. Układ lewoskrętny.

Długość wektora

Definicja

Długość wektora $\vec{v} = (x, y, z)$ *jest określona wzorem:*

$$|\vec{v}| \stackrel{def}{=} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Uwaga. Długość wektora $\vec{v} = (x, y, z)$ jest równa odległości punktu $P = (x, y, z)$ od początku układu współrzędnych. Każdy wektor o długości 1 nazywamy wersorem

Przykłady

Obliczyć długości podanych wektorów:

- $\vec{u} = (-3, 0, 4)$
- $\vec{v} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{31})$
- $\overrightarrow{AB}$ gdzie $A = (2, 1, -3)$, $B = (-1, 1, 4)$

Własności długości wektora

Niech $\vec{u}$ i $\vec{v}$ będą wektorami w R^3 oraz niech $\alpha \in \mathrm{R}$. Wtedy:

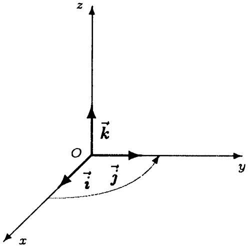
Własności długości wektora

- $|\vec{u}| \geqslant 0$, przy czym $|\vec{u}| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$
- $|\alpha\vec{u}| = |\alpha| \cdot |\vec{u}|$
- $|\vec{u} + \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| + |\vec{v}|$
- $||\vec{u}| - |\vec{v}|| \leqslant |\vec{u} - \vec{v}|$

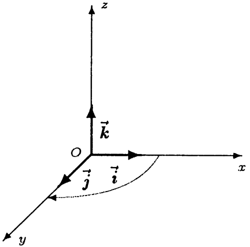
Wersory na osiach układu współrzędnych

Definicja

Wektory $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ $\vec{k} = (0, 0, 1)$ *nazywamy wersorami odpowiednio na osiach* Ox, Oy, Oz



Rys. 5.1.15. Układ prawoskrętny.



Rys. 5.1.16. Układ lewoskrętny.

Iloczyn skalarny

Definicja

Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$ będą dowolnymi wektorami w R^3. *Iloczyn skalarny wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ określamy wzorem:*

$$\vec{u} \circ \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\phi,$$

gdzie ϕ jest kątem między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$

Wzór do obliczania iloczynu skalarnego

Niech $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ oraz $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ będą wektorami w R^3. Wtedy:

$$\vec{u} \circ \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

Przykłady

Uzasadnić, że rzut prostokątny wektora $\vec{u}$ na wektor $\vec{v}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{w} = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \cdot \vec{v}$$

Przykłady

Obliczyć iloczyny skalarne podanych wektorów:

- $\vec{u} = (-1, 2, -3)$, $\vec{v} = (2, 0, -1)$
- $\vec{u} = (\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$, $\vec{v} = (\sqrt{8}, -\sqrt{27}, 0)$

Przykłady

Uzasadnić, że kąt między wektorami niezerowymi $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ i $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ wyraża się wzorem:

$$\phi = \arccos \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Przykłady

Obliczyć kąty między podanymi parami wektorów:

- $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (4, 2, -5)$
- $\vec{u} = (3, -1, 2)$, $\vec{v} = (1, 2, 3)$

Własności iloczynu skalarnego

Własności iloczynu skalarnego

Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ będą dowolnymi wektorami swobodnymi w R^3 oraz niech $\alpha \in \mathrm{R}$. Wtedy:

- $\vec{u} \circ \vec{v} = \vec{v} \circ \vec{u}$ $\qquad$ $\vec{u} \circ \vec{u} = |\vec{u}|^2$
- $(\alpha \vec{u}) \circ \vec{v} = \alpha(\vec{u} \circ \vec{v})$ $\qquad$ $(\vec{u} + \vec{v}) \circ \vec{w} = \vec{u} \circ \vec{w} + \vec{v} \circ \vec{w}$
- $|\vec{u} \circ \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
- wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są prostopadłe $\iff$ $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$

Przykłady

Obliczyć iloczyn skalarny wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$ i $\vec{b} = \vec{p} - 5\vec{q}$, przy czym $\vec{p}$ i $\vec{q}$ są wzajemnie prostopadłymi wersorami

Przykłady

- Znaleźć wektor $\vec{w}$ o długości 1, który jest prostopadły do wektorów $\vec{u} = (1, -2, 0)$, $\vec{v} = (0, 3, -2)$
- Znaleźć wektor $\vec{c}$ o długości 1, który z wektorami $\vec{a} = (1, 0, 0)$, $\vec{b} = (1, \sqrt{3}, 0)$ tworzy kąty $\frac{\pi}{3}$

Rozwiązania

Niech $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ będą wektorami w R^3. Mówimy, że wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ tworzą układ o orientacji zgodnej z orientacją układu współrzędnych, jeżeli

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} > 0$$

W przypadku, gdy podany wyznacznik jest ujemny mówimy, że orientacja układu wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jest przeciwna do orientacji układu współrzędnych. Układ $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ nazywamy prawoskrętnym (lewoskrętnym), gdy jest on zgodny z prawoskrętnym (lewoskrętnym) układem współrzędnych

Iloczyn wektorowy

Definicja

Niech $\vec{u}$ i $\vec{v}$ będą niewspółliniowymi wektorami w R^3. *Iloczynem wektorowym uporządkowanej pary wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy wektor $\vec{w}$, który spełnia warunki:*

- *jest prostopadły do płaszczyzny rozpiętej na wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$*
- *jego długość jest równa polu równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u}$ i $\vec{v}$*

$$|\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\phi,$$

  gdzie ϕ jest kątem między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$
- *orientacja trójki wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jest zgodna z orientacją układu współrzędnych Oxyz*

Iloczyn wektorowy

Definicja

Iloczyn wektorowy pary wektorów $\vec{u}$ *i* $\vec{v}$ *oznaczamy przez* $\vec{u} \times \vec{v}$. *Jeżeli jeden z wektorów* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *jest wektorem zerowym lub jeżeli wektory te są współliniowe, to przyjmujemy, że* $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

Wzór do obliczania iloczynu wektorowego

Niech $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ oraz $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ będą wektorami w R^3. Wtedy:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix},$$

gdzie $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ oznaczają wersory odpowiednio na osiach Ox, Oy, Oz

Przykłady

Korzystając z powyższego wzoru obliczyć iloczyny wektorowe podanych par wektorów:

- $\vec{u} = (-1, 2, 5)$, $\vec{v} = (2, 0, -3)$
- $\vec{u} = (-1, -3, 4)$, $\vec{v} = (5, 6, -2)$

Przykłady

Obliczyć pola podanych obszarów:

- równoległobok rozpięty na wektorach $\vec{u} = (0, 3, -2)$, $\vec{v} = (-1, 2, 5)$
- trójkąt o wierzchołkach $A = (1, 2, 3)$, $B = (0, -1, 2)$, $C = (0, 4, 0)$

Rozwiązania

Własności iloczynu wektorowego

Własności iloczynu wektorowego

Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ będą dowolnymi wektorami w R^3 oraz niech $\alpha \in R$. Wtedy:

- $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$ $\qquad (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \times \vec{v})$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$ $\qquad |\vec{u} \times \vec{v}| \leqslant |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ są równoległe $\iff$ $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

Iloczyn mieszany

Definicja

Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ będą wektorami w R^3. *Iloczyn mieszany uporządkowanej trójki wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, określamy wzorem:*

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}$$

Przykłady

Korzystając z definicji obliczyć iloczyny mieszane podanych uporządkowanych trójek wektorów:

- $\vec{u} = (1, 1, 0)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$, $\vec{w} = (1, 0, 1)$
- $\vec{u} = (-2, 1, 3)$, $\vec{v} = (4, 3, -1)$, $\vec{w} = (1, 0, -2)$

Wzór do obliczania iloczynu mieszanego

Niech $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$ będą dowolnymi wektorami w R^3. Wtedy:

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego wektorów

Interpretacja geometryczna

Iloczyn mieszany wektorów $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ jest równy (z dokładnością do znaku) objętości równoległościanu V rozpiętego na wektorach $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$

$$|V| = |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})|$$

Przykłady

Obliczyć objętości podanych brył:

- równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (0, 3, -2)$, $\vec{c} = (-1, 5, 0)$
- czworościanu o wierzchołkach $P = (1, 1, 1)$, $Q = (1, 2, 3)$, $R = (-1, 1, 0)$, $S = (0, 0, 1)$

Rozwiązania

Przykłady

Obliczyć wysokość czworościanu $ABCD$ opuszczoną z wierzchołka D, jeżeli $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 2, 3)$, $D = (3, 4, 5)$

Rozwiązania

Własności iloczynu mieszanego

Własności iloczynu mieszanego

Niech $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ i $\vec{r}$ będą wektorami w R^3 oraz niech $\alpha \in R$. Wtedy:

- $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}, \vec{u})$ $\qquad (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = -(\vec{v}, \vec{u}, \vec{w})$
- $(\vec{u} + \vec{r}, \vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) + (\vec{r}, \vec{v}, \vec{w})$
- $(\alpha\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \alpha(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ $\qquad |(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \leqslant |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}|$
- wektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ leżą w jednej płaszczyźnie $\iff \quad (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$

Przykłady

- Zbadać, czy wektory $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 0, 4)$, $\vec{c} = (0, -2, 6)$ są współpłaszczyznowe
- Zbadać, czy punkty $A = (1, 0, 2)$, $B = (5, 1, 5)$, $C = (3, -1, 2)$, $D = (1, 3, 5)$ leżą w jednej płaszczyźnie

Rozwiązania

Równanie normalne płaszczyzny

Fakt

Równanie płaszczyznyπ przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\vec{r}_0$ i prostopadłej do wektora $\vec{n} = (A, B, C) \neq \vec{0}$ ma postać:

$$\pi : \quad (\vec{r} - \vec{r}_0) \circ \vec{n} = 0$$

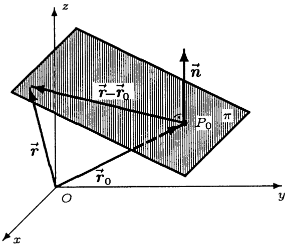
gdzie $\vec{r} = (x, y, z)$ jest wektorem wodzącym punktów przestrzeni. Wektor $\vec{n}$ nazywarny wektorem normalnym tej płaszczyzny

Równanie normalne płaszczyzny

Fakt

W formie rozwiniętej równanie płaszczyzny π przyjmuje postać:

$$\pi : \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$



Rys. 5.6.1. Płaszczyzna wyznaczona przez punkt i wektor normalny.

Równanie ogólne płaszczyzny

Równanie ogólne płaszczyzny

Każde równanie postaci: $\pi : \quad Ax + By + Cz + D = 0$, gdzie $|A| + |B| + |C| > 0$, przedstawia płaszczyznę. Płaszczyzna ta ma wektor normalny $\vec{n} = (A, B, C)$ i przecina oś Oz w punkcie $z = -\frac{D}{C}$, o ile $C \neq 0$

Przykłady

- Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P_0 = (-1, 2, 0)$ i prostopadłej do wektora $\vec{n} = (2, -3, 1)$
- Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez środek odcinka AB, gdzie $A = (3, 2, -1)$, $B(5, 0, 7)$ i prostopadłej do tego odcinka

Przykłady

- Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P = (3, -2, 5)$ i równoległej do płaszczyzny yOz
- Napisać równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $Q = (1, 3, -2)$ i przez oś Oy

Równanie parametryczne płaszczyzny

Fakt

Równanie płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\vec{r}_0$ i rozpiętej na niewspółliniowych wektorach $\vec{u} = (a_1, b_1, c_1)$ i $\vec{v} = (a_2, b_2, c_2)$ ma postać:

$$\pi : \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{u} + t\vec{v},$$

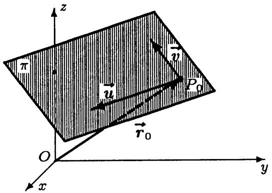
gdzie $s, t \in \mathrm{R}$

Równanie parametryczne płaszczyzny

Fakt

W formie rozwiniętej równanie płaszczyzny π przyjmuje postać:

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + sa_1 + ta_2 \\ y = y_0 + sb_1 + tb_2 \\ z = z_0 + sc_1 + tc_2 \end{cases} \quad \text{gdzie} \quad s, t \in \mathrm{R}$$



Rys. 5.6.3. Płaszczyzna rozpięta przez dwa wektory.

Przykłady

- Napisać równanie parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez początek układu współrzędnych i równoległej do wektorów $\vec{u} = (1, 2, 3)$ i $\vec{v} = (0, -1, 2)$
- Napisać równanie parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez punkty $P = (0, 1, 2)$, $Q = (-1, 4, 5)$, $R = (2, -2, 3)$

Przykłady

- Obliczyć, w jakim punkcie płaszczyzna π przecina oś Ox, jeżeli

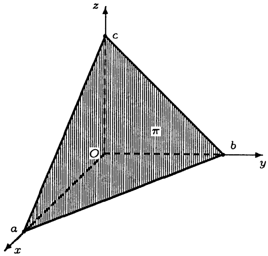
$$\pi: \begin{cases} x = -1 + 2s - t \\ y = 2 + 3s + 2t \\ z = -3 - s + t \end{cases} \qquad \text{gdzie} \quad s, t \in \mathrm{R}$$

Przykłady

Równanie płaszczyzny π odcinającej na osiach Ox, Oy, Oz układu współrzędnych odpowiednio odcinki (zorientowane) $a, b, c \neq 0$ ma postać:

$$\pi : \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Powyższą zależność nazywamy równaniem odcinkowym płaszczyzny



Rys. 5.6.5. Płaszczyzna odcinająca na osiach układu odcinki a, b, c.

Przykłady

Wykorzystując równanie odcinkowe płaszczyzny znaleźć równanie płaszczyzny, która przechodzi przez punkt $P = (-1, 2, 3)$ i odcina na osiach układu odcinki jednakowej długości. Ile rozwiązań ma to zadanie?

Rozwiązania

Równanie parametryczne prostej

Fakt

Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze wodzącym $\vec{r}_0$ i wyznaczonej przez niezerowy wektor kierunku $\vec{v} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ ma postać:

$$l: \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}, \quad \text{gdzie} \quad t \in \mathrm{R}$$

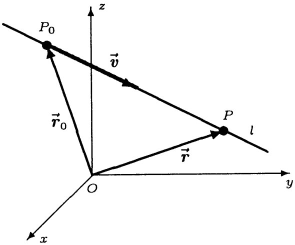
Powyższą zależność nazywamy równaniem parametrycznym prostej w postaci wektorowej, wektor $\vec{v}$ jest jej wektorem kierunkowym

Równanie parametryczne prostej

Fakt

W formie rozwiniętej równanie prostej l przyjmuje postać:

$$l: \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad \text{gdzie} \quad t \in \mathbb{R}$$



Przykłady

- Napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkt $P_0 = (-1, 0, 3)$ i równoległej do wektora $\vec{v} = (2, -1, 5)$
- Napisać równanie parametryczne prostej przechodzącej przez punkty $P = (1, 2, 3)$, $Q = (3, 2, 1)$

Przykłady

- Czy proste

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 3t \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} x = -1 + s \\ y = -11 + 2s \\ z = -1 + s \end{cases} \qquad \text{gdzie} \quad t, s \in \mathrm{R}$$

mają punkt wspólny

Równanie kierunkowe prostej

Uwaga

Równanie prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i wyznaczonej przez niezerowy wektor kierunku $\vec{v} = (a, b, c) \neq \vec{0}$ mażna także zapisać w postaci:

$$l: \quad \frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

Ten sposób zapisu równania parametrycznego prostej nazywamy jej równaniem kierunkowym. W mianownikach powyższych ułamków mogą wystąpić zera

Równanie krawędziowe prostej

Definicja

Prostą l, która jest częścią wspólną dwóch nierównoległych płaszczyzn $\pi_1: \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ oraz $\pi_2: \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ będziemy zapisywać w postaci:

$$l: \ \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Wektor kierunkowy prostej l ma postać $\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$, gdzie $\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1)$, $\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ są wektorami normalnymi odpowiednio płaszczyzn π_1, π_2. Ten sposób zapisu prostej nazywamy równaniem krawędziowym

Przykłady

- Prostą $l : \begin{cases} 6x + 2y - z - 9 = 0 \\ 3x + 2y + 2z - 12 = 0 \end{cases}$ zapisać w postaci parametrycznej

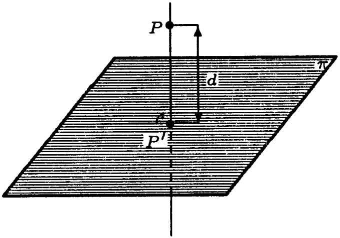
Przykłady

- Dla jakiej wartości parametru p prosta
$l: \begin{cases} x + py - z + 1 = 0 \\ 2x - py + z = 0 \end{cases}$ jest równoległa do płaszczyzny
$\pi: \; 3x - 2y + pz - 1 = 0$

Rzut punktu na płaszczyznę i na prostą

Rzut prostokątny

$$PP' \perp \pi.$$

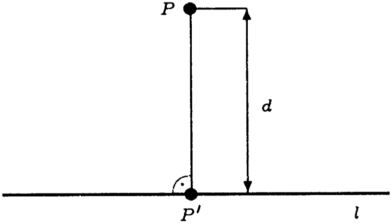


Rys. 5.8.1. Rzut prostokątny punktu na płaszczyznę oraz odległość punktu od płaszczyzny.

Rzut punktu na płaszczyznę i na prostą

Rzut prostokątny

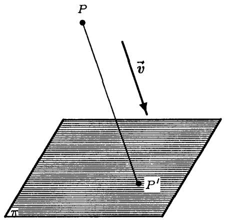
$$PP' \perp l.$$



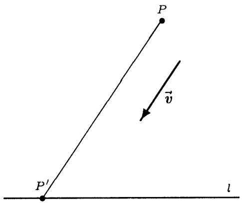
Rys. 5.8.2. Rzut prostokątny punktu na prostą oraz odległość punktu od prostej.

Rzut punktu na płaszczyznę i na prostą

Rzut ukośny



Rys. 5.8.3. Rzut ukośny punktu na płaszczyznę.



Rys. 5.8.4. Rzut ukośny punktu na prostą.

Przykłady

- Znaleźć rzut prostokątny punktu $P = (3, -2, 1)$ na płaszczyznę $\pi : \; 2x - y + 3z = 0$

Przykłady

- Znaleźć rzut prostokątny punktu $P = (2, -1, 4)$ na prostą $l: \ \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-3}$

Przykłady

- Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $\vec{v} = (-1, 3, 0)$ punktu $P = (1, 2, -2)$ na płaszczyznę $\pi: \; x + y - 4z - 6 = 0$

Przykłady

- Znaleźć rzut ukośny w kierunku wektora $\vec{v} = (2, -3, 1)$ punktu $P = (3, 1, 0)$ na prostą
  $l: \ (x, y, z) = (-3 - s, 5 - s, 2 + 2s)$, gdzie $s \in \mathrm{R}$

Przykłady

Znaleźć punkt P' symetryczny do $P = (0, 3, -4)$ względem

- prostej $l: \ x = -3 - t, y = -1 - t, z = 2 + t$, gdzie $t \in \mathrm{R}$
- płaszczyzny $\pi: \ x + 2y - 2z + 4 = 0$

Odległość punktu od płaszczyzny

Fakt

Odległość punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ od płaszczyzny $\pi: \; Ax + By + Cz + D = 0$ wyraża się wzorem:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Odległość płaszczyzn równoległych

Fakt

Odległość między płaszczyznami równoległymi

$$\pi_1 : \; Ax + By + Cz + D_1 = 0, \; \pi_2 : \; Ax + By + Cz + D_2 = 0$$

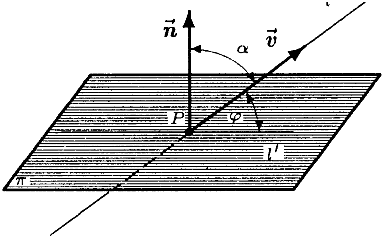
wyraża się wzorem:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Kąt nachylenia prostej do płaszczyzny

Definicja

Kątem nachylenia prostej l do płaszczyzny π *nazywamy kąt* $\phi = \frac{\pi}{2} - \alpha$, *gdzie* α *jest kątem ostrym między wektorem normalnym* $\vec{n}$ *płaszczyzny* π *i wektorem kierunkowym* $\vec{v}$ *prostej l.*
Jeżeli prosta jest równoległa do płaszczyzny, to przyjmujemy, że kąt jej nachylenia do tej płaszczyzny jest równy 0



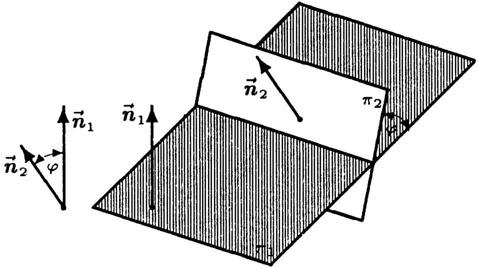
Wzór do obliczania kąta nachylenia

$$\angle(l, \pi) = \arcsin \frac{|\vec{n} \circ \vec{v}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}|}$$

Kąt między płaszczyznami

Definicja

Kątem między płaszczyznami π_1 *i* π_2 *nazywamy kąt ostry między wektorami normalnymi tych płaszczyzn:* $\vec{n}_1$ *i* $\vec{n}_2$ *Przyjmujemy, że kąt między płaszczyznami równoległymi jest równy 0*



Rys. 5.8.8. Kąt między płaszczyznami.

Wzór do obliczania kąta między płaszczyznami

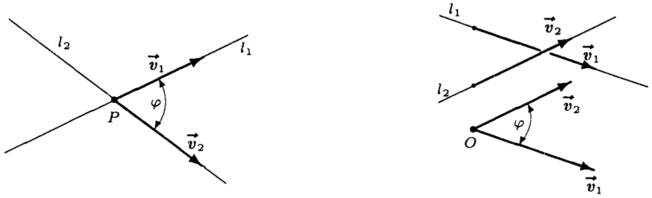
Kąt między płaszczyznami π_1 i π_2 o wektorach normalnych odpowiednio $\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ wyraża się wzorem:

$$\angle(\pi_1, \pi_2) = \arccos \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Kąt między prostymi

Definicja

Kątem między prostymi nazywamy kąt ostry utworzony przez wektory kierunkowe tych prostych. Przyjmujemy, że kąt między prostymi równoległymi jest równy 0



5.8.7. Kąt między prostymi przecinającymi się oraz między prostymi skośnymi.

Przykłady

Obliczyć kąty nachylenia podanych prostych do wskazanych płaszczyzn:

- $l: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-2}, \qquad \pi: \ 2x + y + z = 0$
- $l: \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}, \qquad \pi:$ płaszczyzna yOz
-
-
-
-
-

Przykłady

Obliczyć kąty między podanymi parami płaszczyzn:

- $\pi_1 : \; x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0, \qquad \pi_2 : \; x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$
- $\pi_1 : \begin{cases} x = 1 + s + t \\ y = 2 + s - t \\ z = 3 - s + t \end{cases}, \qquad \pi_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3s - t \\ z = 2 + s + t \end{cases}$
-
-
-
-
-