Wstęp do statystyki matematycznej
Lista 1

1. Czas sprawnej pracy mierników pewnego typu (w dniach) ma rozkład $\mathcal{N}(900, 100^2)$. Jaki powinien być okres gwarancji, aby z prawdopodobieństwem 0.95 miernik działał przynajmniej przez okres gwarancji?

2. Wyznaczyć rozkład średniej arytmetycznej (ozn. $\bar{X}$) niezależnych pomiarów $X_1, ..., X_n$ o rozkładzie $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$? Ile pomiarów należy wykonać, aby prawdopodobieństwo, że $\bar{X}$ odchyli się od μ o mniej niż 0.1 było większe niż 0.99, jeśli $\sigma^2 = 1/4$?

3. Wyznaczyć $P(|\bar{X} - \bar{Y}| < 0.4\sigma)$, jeżeli $X_1, ..., X_m, Y_1, ..., Y_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach odpowiednio $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ oraz $\mathcal{N}(\mu, 3\sigma^2)$. Przyjąć, że $m = 2n = 12$.

4. Niech $X_1, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach gamma $\mathcal{G}(\alpha_1, \beta), ..., \mathcal{G}(\alpha_n, \beta)$ (gęstość rozkładu $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$ ma postać $p_{\alpha\beta}(x) = [\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}/\Gamma(\alpha)]\mathbf{1}_{(0,\theta)}(x)$). Znaleźć rozkład sumy $X_1 + ... + X_n$.

`Najważniejsze rozkłady wykorzystywane w statystyce matematycznej, związane z rozkładem normalnym`

5. Niech $X_1, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$. Korzystając z zadania poprzedniego, wykazać, że zmienna losowa $\chi_n^2 = X_1^2 + ... + X_n^2$ ma rozkład $\mathcal{G}(n/2, 1/2)$ zwany rozkładem chi-kwadrat z n stopniami swobody.

6. Niech X oraz χ_n^2 będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach $\mathcal{N}(0, 1)$ i chi-kwadrat z n stopniami swobody, odpowiednio. Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej
$$t_n = \frac{X}{\sqrt{\chi_n^2}}\sqrt{n}$$
zwanego rozkładem Studenta z n stopniami swobody. Jaką gęstość otrzymujemy dla $n = 1$. Wykazać, że $t_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0, 1)$. Wykazać ponadto, że ciąg gęstości zmiennych t_n jest zbieżny punktowo do gęstości rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$. Co to oznacza w języku zbieżności rozkładów t_n? (przypomnieć sobie lemat Scheffé)

7. Udowodnić, że jeśli $X_1, ..., X_{m+n}$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach normalnych $\mathcal{N}(0, 1)$, to zmienna
$$Y = \frac{X_1^2 + ... + X_n^2}{X_1^2 + ... + X_{m+n}^2}$$
ma rozkład beta $\mathcal{B}e(\frac{n}{2}, \frac{m}{2})$.

8. Niech U, V będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach chi-kwadrat z, odpowiednio, m, n stopniami swobody. Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej
$$F = \frac{\frac{1}{m}U}{\frac{1}{n}V}$$
zwanego rozkladem Snedecora (lub Fishera-Snedecora) z (m, n) stopniami swobody. Wyrazić F przez Y z poprzedniego zadania i skorzystać z wyniku poprzedniego zadania.

9. Pokazać, że jeżeli zmienna losowa X ma jest rozkład Studenta z n stopniami swobody, to $Y = X^2$ ma rozkład Snedecora z $(1, n)$ stopniami swobody.

Wstęp do statystyki matematycznej
Lista 2

1. Niech $X = (X_1, ..., X_n)^T$ bedzie wektorem losowym o rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, a A macierzą nieosobliwą. Znaleźć rozkład wektora losowego $Y = AX$. Rozważyć szczególny przypadek, gdy Σ jest macierzą jednostkową, a A macierza ortogonalną.

2. (i) Sprawdzić, że macierz $W = (w_{i,j})_{i,j=1,2,...,n}$, określona wzorami
$$w_{1,j} = \frac{1}{\sqrt{n}},\ j = 1, 2, ..., n,\ \ w_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{i(i-1)}},\ i = 2, 3, ..., n,\ j < i,$$
$$w_{i,i} = -\sqrt{\frac{i-1}{i}},\ i = 2, 3, ..., n,\ \ w_{i,j} = 0,\ j > i > 1,$$
jest macierzą ortogonalną (tzw. przekształcenie Helmerta);
(ii) Sprawdzić, że jeśli $y = Wx$, to $y_1 = (x_1 + ... + x_n)/\sqrt{n} = \sqrt{n}\overline{x}$ oraz $y_2^2 + ... + y_n^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$;
(iii) Wykazać, że jeżeli $X = (X_1, ..., X_n)^T$ jest wektorem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (próbą z rozkladu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) i $Y = WX$, to $\overline{X} = Y_1/\sqrt{n}$ i $\sum_{i=2}^{n}(X_i - \overline{X})^2 = Y_2^2 + ... + Y_n^2$ są niezależnymi zmiennymi losowymi. Określić ich rozkłady.

3. Niech $X = (X_1, ..., X_n)$ będzie próbą z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Wyznaczyć rozkład statystyki
$$T(X) = \frac{nS^2}{\sigma^2},$$
gdzie
$$S^2 = S_X^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$
jest wariancją z próby (wariancją próbkową lub wariancją empiryczną).

4. Zużycie wody (w hektolitrach) w pewnym osiedlu w ciągu dnia ma rozkład $\mathcal{N}(\mu, 11)$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że empiryczna wariancja zużycia wody w losowo wybranym kwartale nie przekroczy 100 hl.

5. Niech $X = (X_1, ..., X_n)$ będzie próbą z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Wyznaczyć rozkład statystyki
$$T(X) = \frac{\overline{X} - \mu}{S}\sqrt{n-1}.$$

6. Niech $X = (X_1, ..., X_m)$, $Y = (Y_1, ..., Y_n)$ będą niezależnymi próbami z rozkładów odpowiednio $\mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$, $\mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$. Wyznaczyć rozkład statystyki
$$T(X, Y) = \frac{m(n-1)}{(m-1)n}\,\frac{S_X^2}{S_Y^2}.$$

7. Niech $X = (X_1, ..., X_n)$ będzie próbą z rozkładu wykladniczego $\mathcal{E}(\lambda)$ z $\lambda = 1$. Udowodnić, że dla każdego $x \in R$,
$$\lim_{n\to\infty} P(X_{(n)} - \log n \leqslant x) = \exp[-\exp(-x)].$$

8. Niech $X = (X_1, ..., X_n)$ będzie próbą z rozkładu jednostajnego na odcinku $[0, 1]$. Znaleźć gęstość pary statystyk pozycyjnych $(X_{(i)}, X_{(j)})$, gdzie $1 \leqslant i < j \leqslant n$.