Statystyka matematyczna
Lista 2

1. Niech $X_1, \ldots, X_7$ będzie próbą prostą z populacji o wartości oczekiwanej μ i wariancji σ^2 i niech
$$\hat{\mu}_1 = \frac{X_1 + \ldots + X_7}{7} \quad \hat{\mu}_2 = \frac{2X_1 - X_6 + X_4}{2}.$$
będą dwoma estymatorami nieznanej średniej μ. Który z tych estymatorów
a). jest nieobciążony?,
b). jest lepszy i dlaczego?

2. Niech $X_1, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie normalnym. Dobrać stałą k tak, aby funkcja
$$W^2 = k \sum_{i=1}^{n-1} (X_{i+1} - X_i)^2$$
była nieobciążonym estymatorem wariancji σ^2.

3. Niech $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ będzie próbą z rozkładu jednostajnego na przedziale $[0, \theta]$. Wykazać, że
$$T_1(\mathbf{X}) = \frac{n+1}{n} X_{n:n},$$
jest lepszym (ze względu na błąd średniokwadratowy) estymatorem θ niż estymator nieobciążony
$$T_2(\mathbf{X}) = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

4. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny w przedziale $[\theta, \theta + 1]$. Sprawdzić, że estymator
$$T_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{2}$$
jest estymatorem nieobciążonym i zgodnym parametru θ.

5. Niech $x_1, x_2, ..., x_n$ będzie realizacją próby prostej $X_1, X_2, ..., X_n$ z populacji o rozkładzie trzypunktowym
$$P(X = -1) = p, \quad P(X = 0) = 0.4 - p, \quad P(X = 1) = 0.6.$$
Znaleźć metodą momentów estymator parametru p. Czy jest to estymator nieobciążony i zgodny?

6. Niech $X_1, \ldots, X_n$ będzie próbą prostą z populacji o rozkładzie ciągłym o gęstości
$$f(x) = \begin{cases} c(1 + \theta x), & \text{gdy } -1 \le x \le 1, \\ 0, & \text{w przeciwnym razie.} \end{cases}$$
a). znaleźć c,
b). za pomocą metody momentów wyznaczyć estymator parametru θ,
c). pokazać, że $\hat{\theta} = 3\overline{X}$ jest nieobciążonym i zgodnym estymatorem θ.

7. Niech $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ będzie próbą z rozkładu wykładniczego z parametrem λ. Pokazać, że estymator

$$T_n(\mathbf{X}) = nX_{1:n}$$

jest nieobciążonym estymatorem parametru λ, jednakże ciąg estymatorów (T_n) nie jest zgodny.

8. Na podstawie próby prostej $X_1, ..., X_n$ wyznaczyć estymatory metodą największej wiarogodności

   a). parametru p w rozkładzie geometrycznym,

   b). parametrów m i σ^2 w rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(m, \sigma)$,

   c.) parametru θ w rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}(0, \theta)$,

   d.) parametru λ w rozkładzie Poissona,

   e.) parametru c w rozkładzie o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq 1, \\ \frac{c}{x^{c+1}} & \text{dla } x > 1, \end{cases}$$

   f.) parametru a w rozkładzie o gęstości

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{a} & \text{dla } 0 < x < a, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

   Dla b) i d) zbadać nieobciążoność i zgodność otrzymanych estymatorów.

9. W jeziorze jest nieznana liczba N ryb. W celu oszacowania N złowiono m ryb, oznakowano i wpuszczono do jeziora. Po dłuższym czasie złowiono ponownie m ryb i okazało się, że k z nich jest oznakowanych. Znaleźć estymator największej wiarogodności parametru N.