Statystyka matematyczna
Lista 3

1. W pewnym doświadczeniu medycznym bada się czas snu pacjentów leczonych na pewną chorobę. U 16 pacjentów, wylosowanych niezależnie, zmierzono czas snu i otrzymano następujące wyniki (w minutach): 435, 533, 393, 458, 525, 481, 324, 437, 348, 503, 383, 395, 416, 553, 500, 488. Przyjmując, że czas snu ma rozkład $\mathcal{N}(m, 70)$, oszacować średnią m czasu snu pacjentów metodą przedziałową, przyjmując współczynnik ufności 0.99.

2. Oblicz średnią, odchylenie standardowe i błąd standardowy średniej w pięcio–elementowej próbie: 10.0, 8.9, 9.1, 11.7, 7.9. Skonstruuj 90% przedział ufności dla parametru m przy założeniu, że obserwacje pochodzą z rozkładu normalnego $\mathcal{N}(m, \sigma)$.

3. Zoolog zmierzył długość ogona u 86 myszy leśnych. Średnia długość ogona wyniosła 60.43 mm a odchylenie standardowe z próby 3.06mm. 95% przedział ufności dla średniej długości ogona w tej populacji myszy wynosi [59.77, 61.09].

   a) Prawda czy fałsz (uzasadnij): Mamy 95% pewność, że średnia długość ogona w naszej próbie zawiera się w przedziale między 59.77 mm a 61.09 mm.

   b) Prawda czy fasz (uzasadnij): Mamy 95% pewność, że średnia długość ogona w populacji myszy zawiera się w przedziale między 59.77 mm a 61.09 mm.

4. Na podstawie danych z dwóch niezależnych próbek o liczności $n_1 = 10$ i $n_2 = 20$, wylosowanych z populacji o rozkładach normalnych, otrzymano następujące wartości średnich z prób badanej cechy: $\overline{x} = 14.3$ i $\overline{y} = 12.2$. Wariancje cech w obu populacjach są znane i wynoszą $\sigma_1^2 = 22$ oraz $\sigma_2^2 = 18$. Skonstruuj 99% przedział ufności dla różnicy między średnimi wartościami tych cech.

5. Cechy X i Y w dwóch populacjach mają rozkłady normalne o tej samej wariancji. Z dwóch niezależnych prób prostych o liczebnościach odpowiednio: 10 i 12 obliczono $\overline{x} = 1,15$ i $s_1^2 = 2.4$ (dla I próby) oraz $\overline{y} = 1,05$ i $s_2^2 = 2.3$ (dla II próby). Skonstruuj 95% przedział ufności dla różnicy między średnimi wartościami tych cech. Czy można twierdzić, że średnie w tych populacjach są takie same?

6. Siłownia reklamuje program odchudzający twierdząc, że ćwiczący zmniejsza swój obwód w talii w ciągu 5 dni ćwiczeń średnio o 2 cm. Zmierzono obwody w talii 6 mężczyzn biorących udział w programie przed rozpoczęciem ćwiczeń oraz po upływie 5 dni. Otrzymano wyniki w centymetrach: 95.5(przed) i 93.9(po); 98.7(przed) i 97.4(po); 90.4(przed) i 91.7(po); 115.9(przed) i 112.8(po); 104.0 (przed) i 101.3(po) oraz 85.6(przed) i 84.0(po). Założyć normalny rozkład różnic obwodów przed i po 5 dniach ćwiczeń. Znaleźć przedział ufności dla średniego zmniejszenia obwodu na poziomie ufności 0.95. Czy otrzymany wynik świadczy, że twierdzenie siłowni jest uzasadnione?

7. Spośród żarówek wyprodukowanych przez pewną fabrykę wylosowano $n = 100$ sztuk i sprawdzono ich jakość. Okazało się, że 9 z nich nie spełniło norm jakości. Wyznaczyć 95-procentowy przedział ufności dla prawdopodobieństwa p, że wyprodukowana żarówka spełnia normę jakości.

8. Firma reklamowa stara się ustalić jaki procent Polaków ogląda pewien program sportowy.

   a). Ilu ludzi powinno się przepytać, jeżeli chcemy mieć 95% pewność, że długość przedziału ufności dla frakcji Polaków oglądających ten program jest nie większa niż 0.02? (przyjąć $\hat{p} = 0.5$)

   b). Niech n będzie rozmiarem próby ustalonym w punkcie a). Okazuje się, że 37% Polaków z próby o rozmiarze n ogląda ten program. Skonstruuj 90% przedział ufności dla frakcji wszystkich Polaków oglądających ten program.

9. Przy sporządzeniu skali magnetometru dokonano 10 niezależnych pomiarów pola magnetycznego i otrzymano następujące wyniki (w Oe): 0.008, 0.010, 0.015, 0.012, 0.018, 0.009, 0.010, 0.012, 0.014, 0.012. Przyjmując współczynnik ufności 0.98 oszacować metodą przedziałową wariancję wyników pomiarów tym magnetometrem.

10. Zmienna losowa Y_n ma rozkład χ_n^2, jeżeli $Y_n = X_1^2 + ... + X_n^2$, gdzie $X_1, ..., X_n$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowym rozkładzie normalnym $\mathcal{N}(0, 1)$.

    a). Uzasadnić, że dla dużych n, zmienna losowa Y_n ma w przybliżeniu rozkład normalny $\mathcal{N}(n, \sqrt{2n})$.

    b). Wykorzystując punkt a), podać asymptotyczny, dla dużych rozmiarów próby, przedział ufności dla wariancji σ^2 rozkładu normalnego $\mathcal{N}(m, \sigma)$ w przypadku, gdy m nie jest znane.

11. Niech $X_1, ..., X_n$ będzie próbą z rozkładu Poissona z parametrem λ. Uzasadnić, że $2\sqrt{n}(\sqrt{\overline{X}} - \sqrt{\lambda})$ ma w przybliżeniu standardowy rozkład normalny $\mathcal{N}(0, 1)$. Wykorzystać powyższy fakt do konstrukcji asymptotycznego przedziału ufności dla parametru λ na poziomie ufności $1 - \alpha$.