Wykład 1. Szeregi liczbowe.

Alicja Janic

Politechnika Wrocławska

10.03.2023

Wykład jest prowadzony w oparciu o podręcznik
„Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory"
M. Gewerta i Z. Skoczylasa.

Definicja

Szeregiem liczbowym *nazywamy wyrażenie postaci*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots,$$

zapisywane także w formie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *gdzie* $a_n \in \mathbb{R}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

Definicja

Szeregiem liczbowym *nazywamy wyrażenie postaci*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \ldots,$$

zapisywane także w formie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *gdzie* $a_n \in \mathbb{R}$ *dla* $n \in \mathbb{N}$.

Liczbę a_n *nazywamy* n**-tym wyrazem**, *zaś sumę*

$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *nazywamy* n**-tą sumą częściową** *szeregu.*

Definicja

Mówimy, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest* **zbieżny**, *gdy istnieje właściwa granica ciągu sum częściowych* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Nazywamy ją* **sumą szeregu** *i oznaczamy tym samym symbolem, co szereg*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Definicja

Mówimy, że szereg liczbowy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest* **zbieżny**, *gdy istnieje właściwa granica ciągu sum częściowych* $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. *Nazywamy ją* **sumą szeregu** *i oznaczamy tym samym symbolem, co szereg*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Jeśli $\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$ *(lub* $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$*), to mówimy, że szereg jest* **rozbieżny**.

Resztą *(dokładniej* n**-tą resztą***) szeregu zbieżnego nazywamy liczbę* $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Uwaga

Jeżeli szereg ma wyrazy nieujemne, to jest zbieżny albo rozbieżny do ∞.

Uwaga

Jeżeli szereg ma wyrazy nieujemne, to jest zbieżny albo rozbieżny do ∞.

Przykłady

Znaleźć sumy częściowe podanych szeregów i następnie zbadać ich zbieżność:

$$1.\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}, \qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

Twierdzenie

Niech szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *i* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *będą zbieżne oraz niech* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*.*

Wtedy

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Fakt

Szereg zbieżny z pogrupowanymi w dowolny sposób wyrazami ma tę samą sumę, co szereg wyjściowy.

Fakt

Szereg zbieżny z pogrupowanymi w dowolny sposób wyrazami ma tę samą sumę, co szereg wyjściowy.

Nie wolno grupować wyrazów szeregu **rozbieżnego**, gdyż można otrzymać szeregi zbieżne o różnych sumach, np.:

$$(1-1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\ldots=0,$$

$$1-\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\ldots\right)-\ldots=1.$$

Nie jest dopuszczalna zmiana kolejności sumowania nieskończenie wielu wyrazów nawet dla szeregów zbieżnych, np.:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\cdots=\ln 2,$$

a po przestawieniu nieskończenie wielu składników otrzymamy

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{6}+\cdots=\frac{3}{2}\ln 2.$$

Fakt

Szereg geometryczny

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

jest zbieżny dla $|x| < 1$ *i rozbieżny dla* $|x| \geq 1$.
Ponadto dla $|x| < 1$ *suma tego szeregu wynosi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Fakt

Szereg geometryczny

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

jest zbieżny dla $|x| < 1$ *i rozbieżny dla* $|x| \geq 1$.
Ponadto dla $|x| < 1$ *suma tego szeregu wynosi*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Uwaga

Przyjmujemy konwencję, że dla $x = 0$ *i* $n = 0$ *kładziemy* $x^n = 1$

Twierdzenie

Warunek konieczny zbieżności szeregu

Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, to* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Równoważnie powyższe twierdzenie można zapisać w postaci:

Jeżeli $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *lub* $\lim_{n\to\infty} a_n$ *nie istnieje, to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Twierdzenie (Kryterium całkowe zbieżności szeregów)

Niech funkcja f będzie nieujemna i nierosnąca na przedziale $[n_0, \infty)$, gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$.

Wtedy szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ i całka niewłaściwa $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ są jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne (do ∞).

Twierdzenie (Kryterium całkowe zbieżności szeregów)

Niech funkcja f będzie nieujemna i nierosnąca na przedziale $[n_0, \infty)$, gdzie $n_0 \in \mathbb{N}$.

Wtedy szereg $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ i całka niewłaściwa $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ są jednocześnie zbieżne albo jednocześnie rozbieżne (do ∞).

Ponadto **reszta szeregu**, czyli $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f(k)$ spełnia oszacowanie

$$\int\limits_{n+1}^{\infty} f(x)\,dx \leq R_n \leq \int\limits_{n}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Przykłady

Korzystając z kryterium całkowego, zbadać zbieżność podanych szeregów.

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+4}, \qquad 2.\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}.$$

Fakt

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \dots$$

jest zbieżny dla $p > 1$ i rozbieżny do ∞ dla $p \leq 1$.

Fakt

Szereg

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3} \dots$$

jest zbieżny dla $p > 1$ i rozbieżny do ∞ dla $p \leq 1$.

Przypomnijmy, że analogiczne twierdzenie zachodziło dla całek niewłaściwych pierwszego rodzaju:

całka $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$ jest zbieżna dla $p > 1$ i rozbieżna dla $p \leq 1$.

Twierdzenie (Kryterium porównawcze)

Niech $0 \leq a_n \leq b_n$ dla każdego $n \geq n_0$. Wówczas:

1. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny, to także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny.

2. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest rozbieżny, to także szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest rozbieżny.

Twierdzenie (Kryterium porównawcze)

Niech $0 \leq a_n \leq b_n$ *dla każdego* $n \geq n_0$. *Wówczas:*

1. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest zbieżny, to także szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny.*

2. Jeżeli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny, to także szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jest rozbieżny.*

Uwaga

Analogiczne twierdzenie jest prawdziwe dla szeregów o wyrazach niedodatnich.

Twierdzenie (Kryterium ilorazowe)

Niech $a_n, b_n > 0$ *(lub* $a_n, b_n < 0$*) dla każdego* $n \geq n_0$ *oraz niech*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k, \;\text{ gdzie } k \in (0, \infty).$$

Wówczas szeregi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *oraz* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *są jednocześnie zbieżne lub jednocześnie rozbieżne do* ∞ *(*$-\infty$*).*

Założenie, że wyrazy obu szeregów są dodatnie (ujemne) jest istotne, np. szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ jest zbieżny, szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ jest rozbieżny, ale $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$.

Przykłady

Korzystając z kryterium porównawczego lub ilorazowego, zbadać zbieżność podanych szeregów:

$$1.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+2}, \qquad 2.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n}{n\,3^n+2^n}, \qquad 3.\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n-1}{3^n-1}.$$

Twierdzenie (Kryterium d'Alemberta)

Niech $q = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$. *Wówczas, jeżeli* $q < 1$ *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, a gdy* $q > 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Twierdzenie (Kryterium d'Alemberta)

Niech $q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$. *Wówczas, jeżeli* $q < 1$ *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, a gdy* $q > 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Twierdzenie (Kryterium Cauchy'ego)

Niech $q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Wówczas, jeżeli* $q < 1$ *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest zbieżny, a gdy* $q > 1$, *to szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest rozbieżny.*

Uwaga

Jeśli granica $q = 1$, to ani kryterium d'Alemberata, ani kryterium Cauchy'ego nie rozstrzygają czy badany szereg jest zbieżny.

Uwaga

Jeśli granica $q = 1$, to ani kryterium d'Alemberata, ani kryterium Cauchy'ego nie rozstrzygają czy badany szereg jest zbieżny.

Przykłady

Korzystając z kryterium d'Alemberta lub z kryterium Cauchy'ego, zbadać zbieżność podanych szeregów

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$, 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{\pi^n n!}$, 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 4^n}$, 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{1}{n^2}$.

Przykłady

Wykazać zbieżność odpowiedniego szeregu, a następnie na podstawie warunku koniecznego zbieżności szeregów uzasadnić podane równości:

$$1.\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^{2015}}{3^n} = 0, \qquad 2.\ \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty.$$

Definicja

Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest* **zbieżny bezwzględnie**, *gdy szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *jest zbieżny.*

Definicja

Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest* **zbieżny bezwzględnie**, *gdy szereg* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *jest zbieżny.*

Mówimy, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *jest* **zbieżny warunkowo**, *gdy jest zbieżny, ale nie jest zbieżny bezwzględnie.*

Twierdzenie

Szereg zbieżny bezwzględnie jest zbieżny.

Twierdzenie

Szereg zbieżny bezwzględnie jest zbieżny.

Uwaga

Jeżeli szereg badany przy pomocy kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego jest zbieżny, to kryteria te gwarantują jednocześnie jego zbieżność bezwzględną.

Twierdzenie

Szereg zbieżny bezwzględnie jest zbieżny.

Uwaga

Jeżeli szereg badany przy pomocy kryterium d'Alemberta lub Cauchy'ego jest zbieżny, to kryteria te gwarantują jednocześnie jego zbieżność bezwzględną.

Uwaga

Szereg zbieżny bezwzględnie jest zbieżny do tej samej sumy przy dowolnym przestawieniu kolejności wyrazów.

Twierdzenie (tw. Leibniza o szeregu naprzemiennym)

Jeśli ciąg $\{b_n\}$ *jest nierosnący od pewnego numeru* $n_0 \in \mathbb{N}$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, *to* **szereg naprzemienny**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \dots$$

jest zbieżny.

Twierdzenie (tw. Leibniza o szeregu naprzemiennym)

Jeśli ciąg $\{b_n\}$ *jest nierosnący od pewnego numeru* $n_0 \in \mathbb{N}$ *oraz* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$*, to* **szereg naprzemienny**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots$$

jest zbieżny.
Ponadto, dla każdego $n \geq n_0$ *prawdziwe jest oszacowanie reszty szeregu*

$$|R_n| = |S - S_n| = \left| S - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} b_k \right| \leq b_{n+1},$$

gdzie S *oznacza sumę szeregu.*

Przykłady

Korzystając z twierdzenia Leibniza, uzasadnić zbieżność podanych szeregów naprzemiennych:

$$1. \sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}, \qquad 2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n^2+1} - n \right).$$