Wykład 4. Funkcje wielu zmiennych. Pochodne cząstkowe.

Alicja Janic

Politechnika Wrocławska

31.03.2023

Wykład jest prowadzony w oparciu o podręcznik
„Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory”
M. Gewerta i Z. Skoczylasa.

Definicja

Przestrzenią dwuwymiarową (płaszczyzną) *(oznaczaną przez* $\mathbb{R}^2$*) nazywamy zbiór par uporządkowanych* (x, y)*, gdzie* $x, y \in \mathbb{R}$*.*

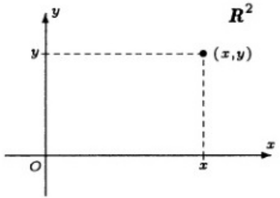
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

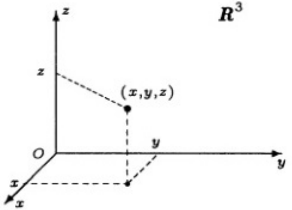
Przestrzenią trójwymiarową (przestrzenią) *(oznaczaną przez* $\mathbb{R}^3$*) nazywamy zbiór uporządkowanych trójek* (x, y, z)*, gdzie* $x, y, z \in \mathbb{R}$*.*

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}.$$

Definicja

Elementy (x, y) *oraz* (x, y, z) *nazywamy* **punktami**, *odpowiednio, płaszczyzny i przestrzeni. Liczby* x, y *i* z *nazywamy* **współrzędnymi kartezjańskimi** *punktów.*





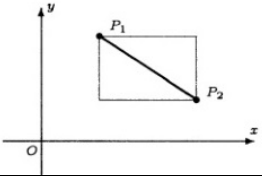
Definicja

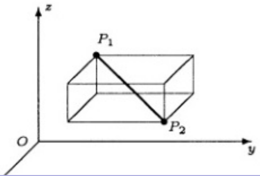
Odległością *punktów* $P_1 = (x_1, y_1)$ *oraz* $P_2 = (x_2, y_2)$ *na płaszczyźnie nazywamy liczbę* $|P_1P_2|$ *określoną wzorem*

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Odległością *punktów* $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ *oraz* $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ *w przestrzeni nazywamy liczbę* $|P_1P_2|$ *określoną wzorem*

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$



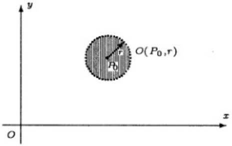


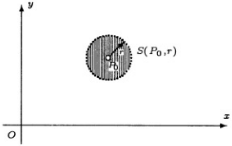
Definicja

Otoczeniem *o promieniu* $r > 0$ *punktu* P_0 *nazywamy zbiór*

$$O(P_0, r) = \{P : |PP_0| < r\}.$$

Otoczeniem punktu na płaszczyźnie jest koło otwarte o środku w P_0 *i promieniu* r*.*
Otoczeniem punktu w przestrzeni jest kula otwarta o środku w P_0 *i promieniu* r*.*



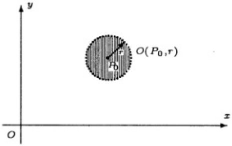


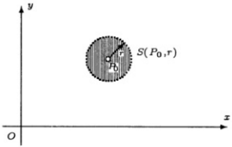
Definicja

Sąsiedztwem *o promieniu* $r > 0$ *punktu* P_0 *nazywamy zbiór*

$$S(P_0, r) = O(P_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

Na płaszczyźnie jest to koło otwarte bez środka, a w przestrzeni kula otwarta bez środka.



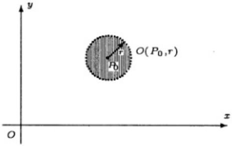


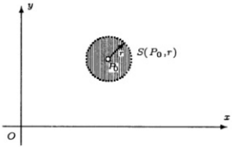
Definicja

Sąsiedztwem *o promieniu* $r > 0$ *punktu* P_0 *nazywamy zbiór*

$$S(P_0, r) = O(P_0, r) \setminus \{x_0\}.$$

Na płaszczyźnie jest to koło otwarte bez środka, a w przestrzeni kula otwarta bez środka.





Uwaga

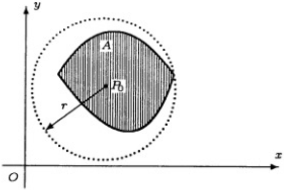
Jeśli promień r nie będzie istotny w rozważaniach, to będziemy pisać krótko $O(P_0)$ *oraz* $S(P_0)$.

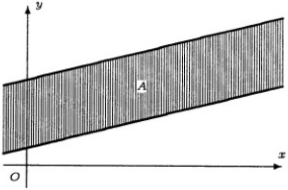
Definicja

Mówimy, że zbiór A jest **ograniczony**, *gdy istnieje punkt P_0 oraz $r > 0$ takie, że*

$$A \subset O(P_0, r),$$

W przeciwnym przypadku zbiór A nazywamy **nieograniczonym**.





Definicja

Mówimy, że P jest **punktem wewnętrznym** *zbioru A jeśli istnieje otoczenie tego punktu zawarte w tym zbiorze, tzn. istnieje liczba $r > 0$ taka, że*

$$O(P, r) \subset A.$$

Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru nazywamy jego **wnętrzem** *i oznaczamy przez* $\mathrm{Int}A$.

Definicja

Mówimy, że P jest **punktem wewnętrznym** *zbioru A jeśli istnieje otoczenie tego punktu zawarte w tym zbiorze, tzn. istnieje liczba $r > 0$ taka, że*

$$O(P, r) \subset A.$$

Zbiór wszystkich punktów wewnętrznych zbioru nazywamy jego **wnętrzem** *i oznaczamy przez* $\mathrm{Int}A$.

Definicja

Zbiór nazywamy **otwartym**, *gdy każdy punkt tego zbioru jest jego punktem wewnętrznym.*

Definicja

Mówimy, że punkt P jest **punktem brzegowym** *zbioru A, gdy w każdym otoczeniu tego punktu istnieją punkty należące do zbioru A i punkty do niego nienależące, tzn. gdy dla każdej liczby $r > 0$ zachodzi warunek*

$$O(P,r) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad O(P,r) \cap A' \neq \emptyset.$$

Definicja

Mówimy, że punkt P jest **punktem brzegowym** *zbioru A, gdy w każdym otoczeniu tego punktu istnieją punkty należące do zbioru A i punkty do niego nienależące, tzn. gdy dla każdej liczby $r > 0$ zachodzi warunek*

$$O(P, r) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad O(P, r) \cap A' \neq \emptyset.$$

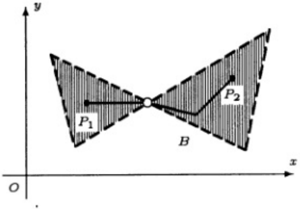
Definicja

Brzegiem *zbioru nazywamy zbiór jego punktów brzegowych. Brzeg zbioru A oznaczamy przez ∂A.*

Definicja

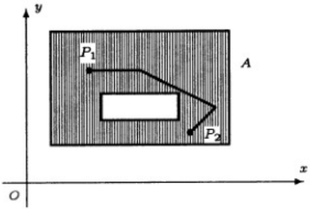
Mówimy, że niepusty podzbiór płaszczyzny jest **obszarem**, *gdy jest otwarty i gdy każde dwa punkty tego zbioru można połączyć łamaną.*

Poniższy zbiór nie jest obszarem, mimo, że jest zbiorem otwartym.



Definicja

Obszar wraz z jego brzegiem nazywamy **obszarem domkniętym**.



Definicje podane w poprzedniej sekcji można przenieść bez istotnych zmian do przestrzeni o większej liczbie wymiarów. Zdefiniujmy więc **przestrzeń *n*-wymiarową** jako zbiór punktów o *n* współrzędnych:

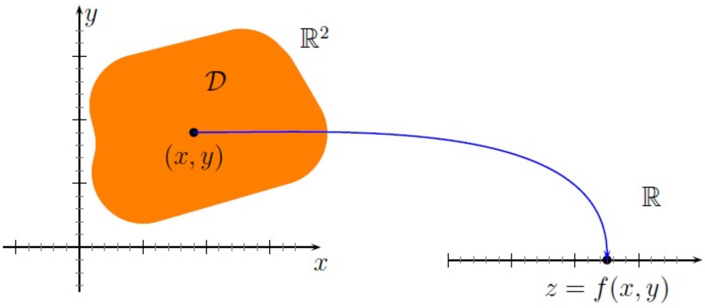
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1, x_2, \ldots, x_n \in R\}.$$

Definicje podane w poprzedniej sekcji można przenieść bez istotnych zmian do przestrzeni o większej liczbie wymiarów. Zdefiniujmy więc **przestrzeń n-wymiarową** jako zbiór punktów o n współrzędnych:

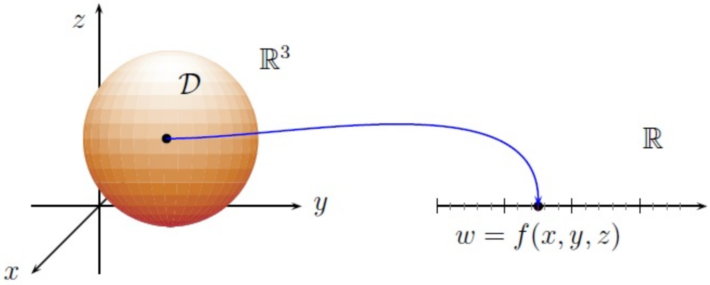
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in R\}.$$

Definicja

- **Funkcją n-zmiennych** *określoną na zbiorze $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^n$ o wartościach w $\mathbb{R}$ nazywamy przyporządkowanie każdemu punktowi ze zbioru $\mathcal{D}$ dokładnie jednej liczby rzeczywistej.*
- *Zbiór $\mathcal{D}$ nazywamy* **dziedziną** *funkcji.*
- *Funkcję taką oznaczamy przez $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ lub $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, gdzie $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathcal{D}$.*
- *Wartość funkcji f w punkcie $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ oznaczamy przez $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.*



Dla $n = 2$ mamy funkcję dwóch zmiennych $z = f(x, y)$.



Dla $n = 3$ mamy funkcję trzech zmiennych $w = f(x, y, z)$.

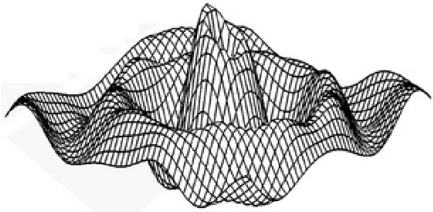
Definicja

Niech f będzie funkcją określoną na podzbiorze przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Jeżeli dany jest tylko wzór określający funkcję, to zbiór punktów przestrzeni, dla których wzór ten ma sens nazywamy **dziedziną naturalną** *funkcji f.*

Definicja

Niech f będzie funkcją określoną na podzbiorze przestrzeni $\mathbb{R}^n$. Jeżeli dany jest tylko wzór określający funkcję, to zbiór punktów przestrzeni, dla których wzór ten ma sens nazywamy **dziedziną naturalną** *funkcji f.*

Od teraz będziemy się koncentrować na funkcjach dwóch zmiennych.



Definicja

Wykresem *funkcji f dwóch zmiennych nazywamy podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dany wzorem*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}.$$

Poziomicą wykresu *funkcji f odpowiadającą poziomowi $h \in \mathbb{R}$ nazywamy podzbiór płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ dany wzorem*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = h\}.$$

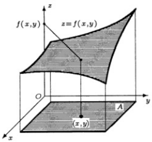
Definicja

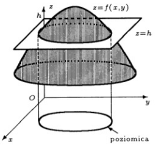
Wykresem *funkcji f dwóch zmiennych nazywamy podzbiór przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dany wzorem*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y)\}.$$

Poziomicą wykresu *funkcji f odpowiadającą poziomowi $h \in \mathbb{R}$ nazywamy podzbiór płaszczyzny $\mathbb{R}^2$ dany wzorem*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) = h\}.$$



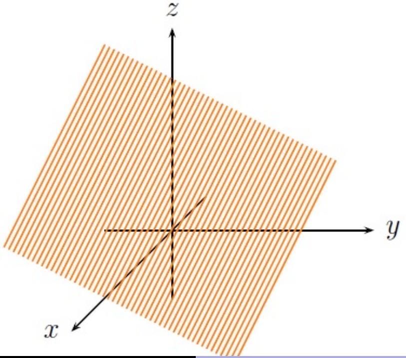


Wykresy ważniejszych funkcji dwóch zmiennych:

Wykresem funkcji

$$z = Ax + By + C$$

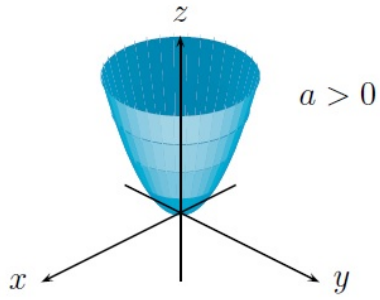
jest **płaszczyzna** o wektorze normalnym $\vec{n} = [-A, -B, 1]$, przechodząca przez punkt $(0, 0, C)$.



Wykresem funkcji

$$z = a(x^2 + y^2), \text{ gdzie } a \neq 0,$$

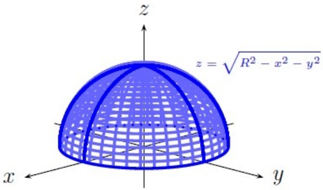
jest **paraboloida obrotowa**, czyli powierzchnia obrotowa powstała z obrotu paraboli $z = ax^2$ (lub $z = ay^2$) wokół osi Oz.

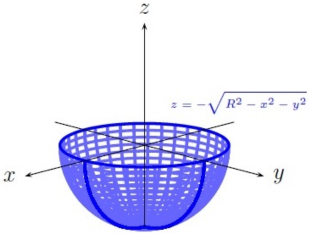


Wykresem funkcji

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

jest górna lub dolna **półsfera** o środku w początku układu współrzędnych i promieniu $R > 0$.

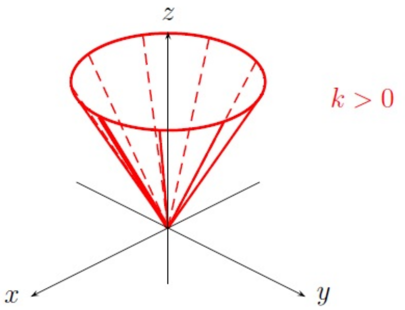




Wykresem funkcji

$$z = k\sqrt{x^2 + y^2}, \text{ gdzie } k \neq 0,$$

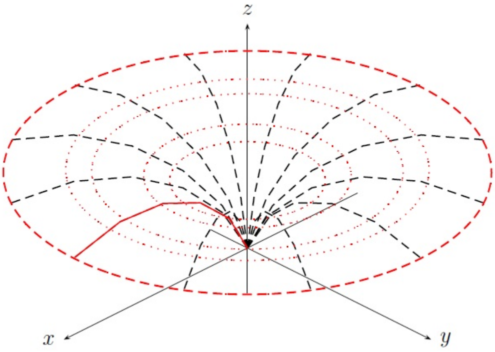
jest **stożek**, czyli powierzchnia powstała z obrotu półprostej $z = kx,\ y = 0$ dla $x \geq 0$ wokół osi Oz.



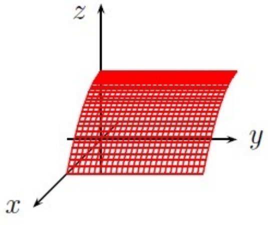
Wykresem funkcji

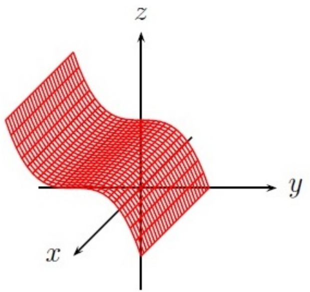
$$z = h\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right),$$

jest **powierzchnia obrotowa** powstała z obrotu wykresu funkcji $z = h(x)$, $y = 0$, dla $x \geq 0$ wokół osi Oz.

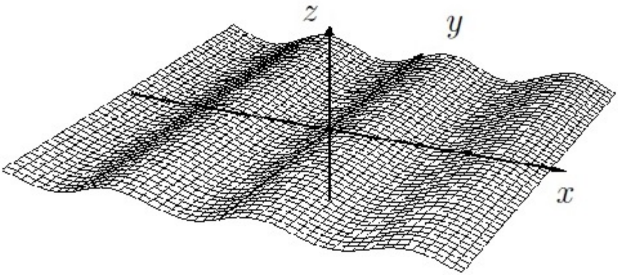


Wykresem funkcji $z = g(x)$ lub $z = k(y)$ jest **powierzchnia walcowa** powstała z przesunięcia wykresu funkcji $z = g(x)$ dla $y = 0$ równolegle do osi Oy lub wykresu funkcji $z = k(y)$ dla $x = 0$ równolegle do osi Ox.





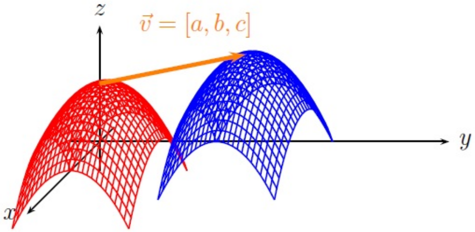
Wykresem funkcji $z = g(x)$ lub $z = k(y)$ jest **powierzchnia walcowa** powstała z przesunięcia wykresu funkcji $z = g(x)$ dla $y = 0$ równolegle do osi Oy lub wykresu funkcji $z = k(y)$ dla $x = 0$ równolegle do osi Ox.



Wykres funkcji

$$z = f(x-a, y-b) + c$$

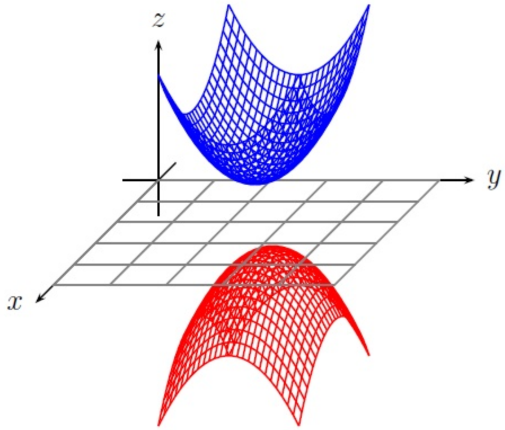
powstaje z wykresu funkcji $z = f(x, y)$ przez przesunięcie o wektor $\vec{v} = [a, b, c]$.



Wykres funkcji

$$z = -f(x, y)$$

powstaje z wykresu funkcji $z = f(x, y)$ przez symetryczne odbicie względem płaszczyzny xOy .



Definicja

Mówimy, że **ciąg punktów** $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ **dąży do punktu** $P_0 = (x_0, y_0)$, *co oznaczamy* $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$ *lub* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)$, *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \ \wedge \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

(Oznacza to zbieżność dla każdej współrzędnej.)

Definicja (Heinego granicy funkcji dwóch zmiennych)

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie punktu $S(x_0, y_0)$. Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) **granicę właściwą** $g \in \mathbb{R}$*, co zapisujemy*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = g,$$

wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnych ciągów punktów $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S(x_0, y_0)$ zachodzi warunek

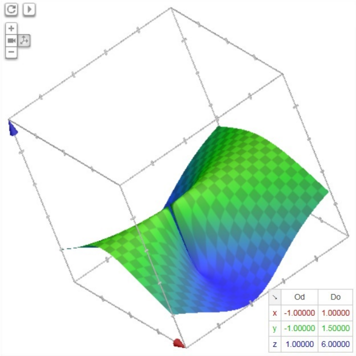
$$\left[\lim_{n\to\infty}(x_n, y_n) = (x_0, y_0)\right] \Longrightarrow \left[\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = g\right].$$

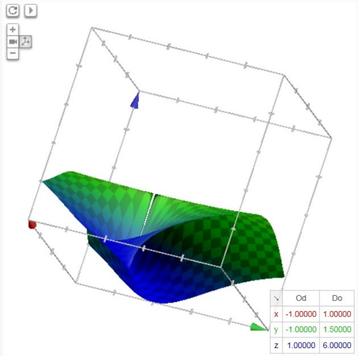
Przykład

Dla funkcji

$$f(x, y) = \frac{x^2 + 3y^2}{x^2 + y^2}$$

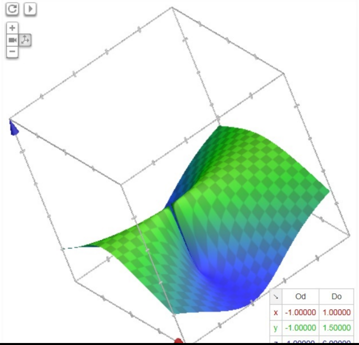
nie istnieje granica w punkcie $(0, 0)$.

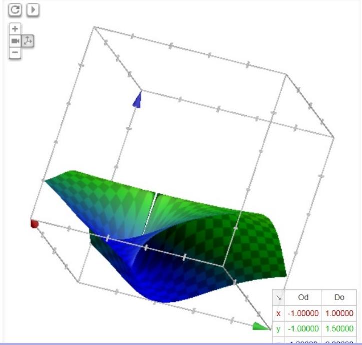




Przykład

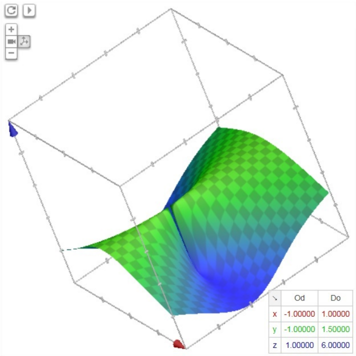
Jeżeli rozważymy ciąg punktów $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$, *to on dąży do* $(0,0)$ *wzdłuż osi* Ox. *Jeżeli natomiast rozważymy ciąg punktów* $\left(0, \frac{1}{n}\right)$, *to on dąży do* $(0,0)$ *wzdłuż osi* Oy.

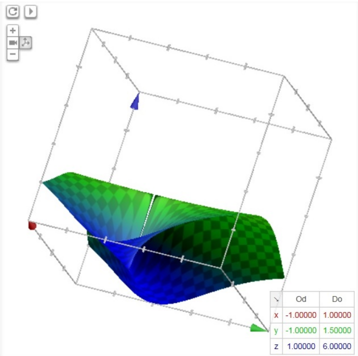




Przykład

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 3\cdot 0^2}{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + 0^2} = 1, \ \lim_{n\to\infty} \frac{0^2 + 3\cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2}{0^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^2} = 3$$





Twierdzenie (o arytmetyce granic)
Jeżeli funkcje f i g mają w punkcie (x_0, y_0) granice właściwe, to:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)+g(x,y)] = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}[f(x,y)\cdot g(x,y)] = \left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right]\cdot\left[\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\right]$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \frac{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)}, \text{ o ile } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) \neq 0$$

Definicja

Niech funkcja f dwóch zmiennych będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0, y_0)$. *Mówimy, że f jest* **ciągła w punkcie** (x_0, y_0), *wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

Definicja

Niech funkcja f dwóch zmiennych będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0, y_0)$. Mówimy, że f jest **ciągła w punkcie** (x_0, y_0)*, wtedy i tylko wtedy, gdy*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0).$$

Twierdzenie

Jeżeli funkcje f i g są ciągłe w punkcie (x_0, y_0), to także funkcje

$$f+g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}\ (\text{o ile } g \neq 0)$$

również są ciągłe w tym punkcie.

Definicja

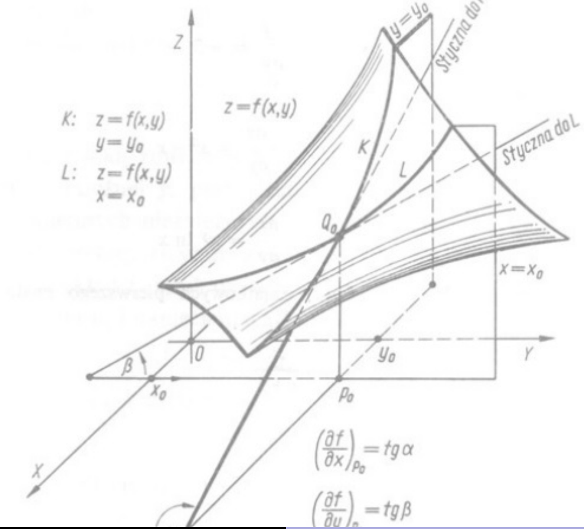
Niech funkcja f będzie określona na pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0).
Pochodne cząstkowe pierwszego rzędu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) definiujemy jako granice:

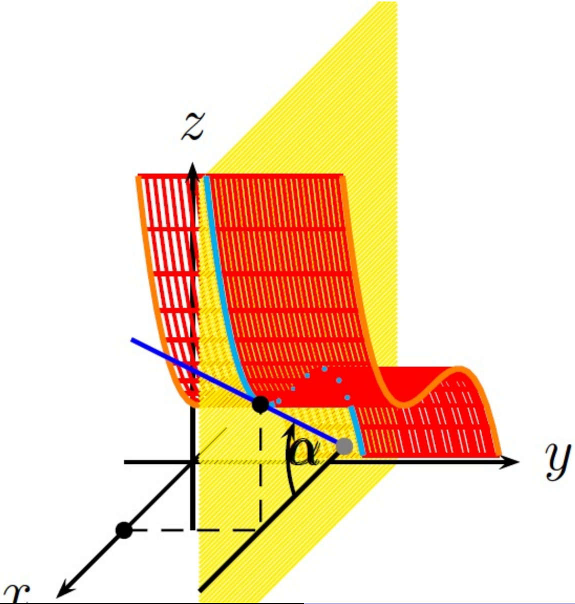
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) := \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

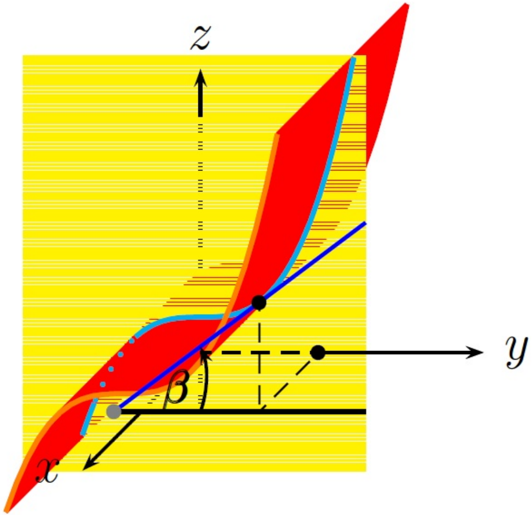
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) := \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

Jeśli powyższe granice są właściwe (niewłaściwe), to mówimy, że pochodna jest właściwa (niewłaściwa).

Interpretacja geometryczna pochodnych cząstkowych




z
y
x
α


z
y
x
β

Definicja (Pochodne cząstkowe drugiego rzędu)

Niech funkcja f ma pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ przynajmniej na otoczeniu punktu (x_0, y_0). Pochodne cząstkowe drugiego rzędu funkcji f w punkcie (x_0, y_0) określamy wzorami:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0, y_0).$$

Powyższe pochodne oznaczamy odpowiednio przez $f_{xx}(x_0, y_0)$, $f_{xy}(x_0, y_0)$, $f_{yx}(x_0, y_0)$, $f_{yy}(x_0, y_0)$.

Twierdzenie (Schwarza o pochodnych mieszanych)

Jeżeli pochodne cząstkowe $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *są ciągłe w punkcie* (x_0, y_0) *to są równe*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Fakt (Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji)

Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe pierwszego rzędu w punkcie (x_0, y_0). Równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ma postać

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Przykład: równanie płaszczyzny stycznej do $f(x, y) = \frac{\arctan(x)}{1+y^2}$ w punkcie $(1, 0, f(1, 0))$