Wykład 5. Pochodna kierunkowa. Ekstrema funkcji dwóch zmiennych.

Alicja Janic

Politechnika Wrocławska

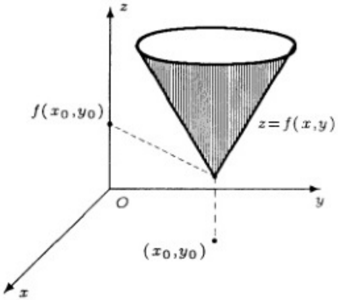
16.04.2023

Wykład jest prowadzony w oparciu o podręcznik
„Analiza matematyczna 2. Definicje, twierdzenia, wzory"
M. Gewerta i Z. Skoczylasa.

Definicja

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) **minimum lokalne właściwe**, *gdy istnieje sąsiedztwo $S(x_0, y_0)$ takie, że dla dowolnego punktu $(x, y) \in S(x_0, y_0)$ zachodzi nierówność*

$$f(x, y) > f(x_0, y_0).$$



Definicja

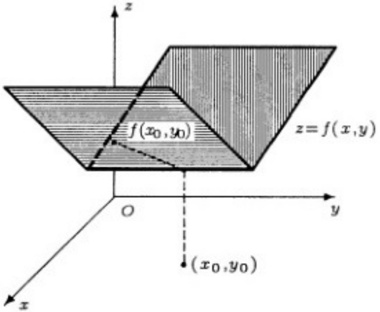
Analogicznie, mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) **maksimum lokalne właściwe**, *gdy istnieje sąsiedztwo $S(x_0, y_0)$ takie, że dla dowolnego punktu $(x, y) \in S(x_0, y_0)$ zachodzi nierówność*

$$f(x, y) < f(x_0, y_0).$$

Uwaga

1. Jeśli w powyższej definicji zastąpimy ostre nierówności przez słabe (tzn. $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$ lub $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$), to mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) **minimum lokalne** *lub* **maksimum lokalne**.

2. Maksima i minima lokalne funkcji (właściwe lub niewłaściwe) nazywamy **ekstremami lokalnymi**.



Przykłady

Korzystając z definicji zbadać, czy podane funkcje mają ekstrema lokalne we wskazanych punktach.

1. $f(x,y) = 5|x| + |y+1|$ w punkcie $(0,-1)$,

2. $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ w punkcie $(0,0)$.

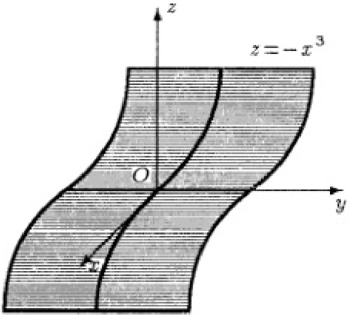
Twierdzenie (warunek konieczny istnienia ekstremum)

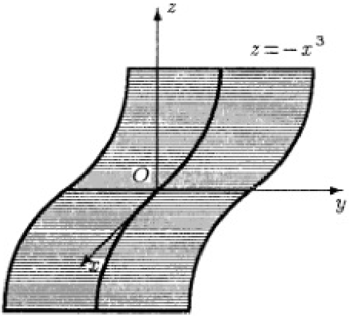
Jeśli funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne i istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ oraz $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, to

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Uwaga

1. Punkty, w których obie pochodne cząstkowe się zerują nazywamy **stacjonarnymi (krytycznymi)**.
2. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Zerowanie się obu pochodnych cząstkowych nie gwarantuje istnienia ekstremum lokalnego!
Przykładowo, funkcja $f(x, y) = -x^3$ *spełnia warunki* $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$*, ale nie ma w punkcie* $(0,0)$ *ekstremum lokalnego.*


z
$z = -x^3$
O
y
x



Uwaga

Funkcja może mieć ekstreum lokalne tylko w punkcie stacjonarnym lub w punkcie, w którym przynajmniej jedna pochodna nie istnieje.

Twierdzenie (warunek wystarczający istnienia ekstremum)

Niech funkcja f ma ciągłe pochodne cząstkowe drugiego rzędu na otoczeniu punktu (x_0, y_0) oraz niech $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. Jeśli wyznacznik, zwany **hessjanem**,

$$H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0,$$

to funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) ekstremum lokalne właściwe.
Jeśli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0$, to w (x_0, y_0) jest minimum lok. właściwe.
Jeśli $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) < 0$, to w (x_0, y_0) jest maksimum lok. właściwe.

Uwaga

Jeśli hessjan $H(x_0, y_0)$ jest ujemny, to funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie (x_0, y_0). Jeśli hessjan $H(x_0, y_0) = 0$, to badanie istnienia ekstremum w punkcie (x_0, y_0) musimy przeprowadzić innymi metodami (np. z definicji).

Uwaga

Jeśli hessjan $H(x_0, y_0)$ jest ujemny, to funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie (x_0, y_0). Jeśli hessjan $H(x_0, y_0) = 0$, to badanie istnienia ekstremum w punkcie (x_0, y_0) musimy przeprowadzić innymi metodami (np. z definicji).

Przykłady

Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych:

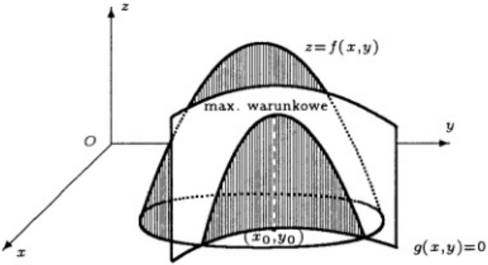
1.$f(x, y) = xy + \ln y + x^2$,

2. $f(x, y) = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$.

Definicja

Mówimy, że funkcja f ma w punkcie (x_0, y_0) **maksimum lokalne właściwe z warunkiem** $g(x, y) = 0$, *gdy* $g(x_0, y_0) = 0$ *oraz istnieje* $S(x_0, y_0)$ *takie, że dla dowolnego* $(x, y) \in S(x_0, y_0)$ *spełniającego* $g(x, y) = 0$ *zachodzi*

$$f(x, y) < f(x_0, y_0).$$



Uwaga

Analogicznie, funkcja f ma **minimum warunkowe***, gdy zachodzi odwrotna nierówność, tzn.* $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

Uwaga

Analogicznie, funkcja f ma **minimum warunkowe**, *gdy zachodzi odwrotna nierówność, tzn.* $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

Uwaga

Ekstremów lokalnych funkcji f dwóch zmiennych z warunkiem $g(x, y) = 0$ *można szukać następująco:*

Uwaga

Analogicznie, funkcja f ma **minimum warunkowe***, gdy zachodzi odwrotna nierówność, tzn. $f(x,y) > f(x_0,y_0)$.*

Uwaga

Ekstremów lokalnych funkcji f dwóch zmiennych z warunkiem $g(x,y)=0$ można szukać następująco:
1. Krzywą $\Gamma : g(x,y)=0$ dzielimy na łuki, które są wykresami funkcji postaci $y=h(x)$, gdzie $x \in I$ lub postaci $x=p(y)$, gdzie $y \in J$.

Uwaga

Analogicznie, funkcja f ma **minimum warunkowe**, *gdy zachodzi odwrotna nierówność, tzn.* $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

Uwaga

Ekstremów lokalnych funkcji f dwóch zmiennych z warunkiem $g(x, y) = 0$ można szukać następująco:
1. Krzywą $\Gamma : g(x, y) = 0$ dzielimy na łuki, które są wykresami funkcji postaci $y = h(x)$, gdzie $x \in I$ lub postaci $x = p(y)$, gdzie $y \in J$.
2. Szukamy ekstremów funkcji jednej zmiennej $f(x, h(x))$ na przedziale I lub funkcji $f(p(y), y)$ na przedziale J.

Przykłady

Wyznaczyć ekstrema podanych funkcji, których argumenty spełniają podane warunki:

1. $f(x, y) = x^2 + y^2, \ xy = 4,$

2. $f(x, y) = x^2 - 2xy, \ x - y^2 = 0$.

Przypomnijmy twierdzenie Weierstrassa:

Twierdzenie

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to jej obraz jest zbiorem ograniczonym. Ponadto funkcja f **osiąga swoje kresy***, tzn. dla pewnych liczb $c, d \in [a, b]$ zachodzi $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ dla każdego $x \in [a, b]$.*

Przypomnijmy twierdzenie Weierstrassa:

Twierdzenie

Jeśli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jest funkcją ciągłą, to jej obraz jest zbiorem ograniczonym. Ponadto funkcja f **osiąga swoje kresy**, *tzn. dla pewnych liczb $c, d \in [a, b]$ zachodzi $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ dla każdego $x \in [a, b]$.*

Uwaga

Również w przypadku funkcji dwóch zmiennych twierdzenie Weiestrassa zachodzi i każda ciągła funkcja określona na zbiorze domkniętym i ograniczonym w $\mathbb{R}^2$ przyjmuje wartości ekstremalne.

Definicja

Niech A będzie niepustym podzbiorem dziedziny funkcji f*.*
1. Mówimy, że liczba m jest **najmniejszą wartością** *funkcji f na zbiorze A, gdy istnieje punkt* $(x_0, y_0) \in A$ *taki, że* $f(x_0, y_0) = m$ *oraz dla każdego* $(x, y) \in A$ *zachodzi nierówność* $f(x, y) \geq m$*. Piszemy wtedy* $f_{\min} = m$*.*

Definicja

Niech A będzie niepustym podzbiorem dziedziny funkcji f.
1. Mówimy, że liczba m jest **najmniejszą wartością** *funkcji f na zbiorze A, gdy istnieje punkt $(x_0, y_0) \in A$ taki, że $f(x_0, y_0) = m$ oraz dla każdego $(x, y) \in A$ zachodzi nierówność $f(x, y) \geq m$. Piszemy wtedy $f_{\min} = m$.*
2. Mówimy, że liczba M jest **największą wartością** *funkcji f na zbiorze A, gdy istnieje punkt $(x_0, y_0) \in A$ taki, że $f(x_0, y_0) = M$ oraz dla każdego $(x, y) \in A$ zachodzi nierówność $f(x, y) \leq M$. Piszemy wtedy $f_{\max} = M$.*

Algorytm szukania ekstremów globalnych na obszarze domkniętym:

1. Na obszarze otwartym szukamy punktów, w których funkcja **może mieć** ekstremum lokalne.

Algorytm szukania ekstremów globalnych na obszarze domkniętym:

1. Na obszarze otwartym szukamy punktów, w których funkcja **może mieć** ekstremum lokalne.
2. Na brzegu obszaru szukamy punktów, w których funkcja **może mieć** ekstremum warunkowe.

Algorytm szukania ekstremów globalnych na obszarze domkniętym:

1. Na obszarze otwartym szukamy punktów, w których funkcja **może mieć** ekstremum lokalne.
2. Na brzegu obszaru szukamy punktów, w których funkcja **może mieć** ekstremum warunkowe.
3. Porównujemy wartości funkcji w otrzymanych punktach i na tej podstawie ustalamy najmniejszą i największą wartość funkcji f na danym obszarze.

Przykłady

Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych obszarach.

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $D: |x| + |y| \leq 2$,
2. $f(x,y) = xy^2 + 4xy - 4x$, $D: -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 0$.

Przykłady zagadnień ekstremalnych w geometrii, fizyce i technice:

1. W trójkącie o wierzchołkach $A = (-1, 5)$, $B = (1, 4)$, $C = (2, -3)$ znaleźć punkt $M = (x_0, y_0)$, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.
2. Jakie powinny być długość a, szerokość b i wysokość h prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności V , aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?
3. Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:

$$k : \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ z + 1 = 0. \end{cases} \quad \text{oraz} \quad l : \begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ z - 2 = 0. \end{cases}$$