

RACHUNEK PRAWDOPODOBIENSTWA

Lista 1

1. Niech A, B, C będą zdarzeniami. Zapisać za pomocą działań na zbiorach zdarzenia: (a) zachodzi dokładnie jedno ze zdarzeń A, B, C ; (b) zachodzą dokładnie dwa ze zdarzeń A, B, C ; (c) zachodzą co najmniej dwa ze zdarzeń A, B, C .

2. Obliczyć $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ i $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$, jeśli

$$A_n = \{x : a \leq x < a + n^{-1}\}, \quad B_n = \{x : a \leq x < b - n^{-1}\}.$$

3. Udowodnić, że $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + \dots + P(A_n)$.

4. Dane są $P(A') = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ i $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$. Obliczyć $P(B')$, $P(A \cap B')$ i $P(B \setminus A)$. (**odp.** $P(B') = 3/4$, $P(A \cap B') = 5/12$, $P(B \setminus A) = 0$)

5. Dane są $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ i $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, ponadto $P(A \setminus B) = P(B \setminus A)$. Obliczyć $P(A)$ i $P(B \setminus A)$. (**odp.** $P(A) = 3/8$, $P(B \setminus A) = 1/8$)

6. Dane są $P(A' \cap B') = \frac{1}{2}$, $P(A') = \frac{2}{3}$, ponadto $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$. Obliczyć $P(B)$ i $P(A' \cap B)$. (**odp.** $P(B) = 5/12$, $P(A' \cap B) = 1/6$)

7. Dane są $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B) = \frac{3}{4}$, $A \cap B = \emptyset$. Uporządkować rosnąco $P(A \cup B)$, $P(A' \cup B)$ i $P(A \cup B')$. (**odp.** $P(A \cup B') < P(A' \cup B) < P(A \cup B)$)

8. Niech $A \cup B \cup C = \Omega$, $P(B) = 2P(A)$, $P(C) = 3P(A)$. Ponadto, niech $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C)$. Pokazać, że $\frac{1}{6} \leq P(A) \leq \frac{1}{4}$, przy czym oba ograniczenia są osiągalne.

9. Udowodnić, że

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C),$$

a następnie uogólnić ten wzór dla sumy n zbiorów.