Rachunek Prawdopodobieństwa
Lista 9

1. Samolot zabiera 80 osób. Zakładając, że waga pasażerów ma pewien rozkład o wartości oczekiwanej 80 kg i wariancji 10 kg^2 oszacować, za pomocą nierówności Czebyszewa, prawdopodobieństwo tego, że łączna waga pasażerów przekroczy 7000 kg.

2. Wytwórnia produkuje oporniki o wartości średniej $2k\Omega$ i odchyleniu standardowym 100Ω. Jaki procent oporników mieści się w klasie $2k\Omega \pm 10\%$, jeżeli (a) nic nie wiadomo o rozkładzie; (b) rozkład oporności jest normalny.

3. Można wykazać, że średnia arytmetyczna $\overline{X}_n$ z niezależnych pomiarów $X_1, ..., X_n$ pochodzących z rozkładu $N(m, \sigma)$ ma rozkład $N(m, \sigma/\sqrt{n})$. Ile niezależnych pomiarów pochodzących z rozkładu $N(m, 0.5)$ należy wykonać aby prawdopodobie–ństwo, że średnia $\overline{X}_n$ odchyli się od m o mniej niż 0.1 było większe niż 0.99? Obliczenia wykonać korzystając (a) z nierównoći Czebyszewa; (b) z dokładnego rozkładu średniej i z tablic dystrybuanty rozkładu normalnego.

4. Wysokość roślin kukurydzy w pewnej ich populacji ma rozkład normalny ze średnią 145 cm i odchyleniem standardowym 22 cm.

   a) Jaki procent roślin ma wysokość w przedziale między 135 a 155 cm ?
   b) Niech Y reprezentuje średnią wysokość w losowej próbie 16 roślin. Oblicz $P(135 < Y < 155)$.
   c) Niech Y reprezentuje średnią wysokość w losowej próbie 36 roślin. Oblicz $P(135 < Y < 155)$.

5. Proponowany rozmiar próby do oceny przeciętnego poziomu cholesterolu u pracujących dorosłych wynosi 1000. Jaki rozmiar próby jest potrzebny aby czterokrotnie zredukować odchylenie standardowe średniej ?

6. Wiadomo, że odchylenie standardowe wagi noworodków wynosi 500 g. Jaki powinien być rozmiar próby, żeby standardowe odchylenie średniej wagi noworodków w próbie było mniejsze niż 150 g.

7. Niech $X_1, X_2, \ldots,$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Poissona z parametrem $\lambda = 1$. Dla każdego $x \in R$ obliczyć granicę

$$lim_{N\to\infty} P\left(\frac{S_N - N}{N^{1/2}} < x\right),$$

   gdzie $S_N = X_1 + X_2 + \ldots + X_N$.

8. Niech $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie (a) Poissona z parametrem $\lambda = 2$; (b) wykładniczym z parametrem $\lambda = 0.5$. Oszacować wartość prawdopodobieństwa

$$P\left(\sum_{i=1}^{100} X_i < 210\right)$$

   korzystając z nierówności Czebyszewa oraz z centralnego twierdzenia granicznego.

9. Obliczyć w przybliżeniu prawdopodobieństwo, że partia 100 elementów, z których każdy ma czas pracy T_i $(i = 1, 2, \ldots, 100)$ wystarczy na zapewnienie pracy urządzenia przez łącznie 100 godzin, gdy wiadomo, że $\mathrm{E}T_i = 1$ oraz $\mathrm{Var}T_i = 1$.

10. Tygodniowe wypłaty z pewnego funduszu są niezależnymi zmennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z tym samym parametrem $\lambda = \frac{1}{1000\text{zł}}$. Obliczyć prawdopodobieństwo, że łączna wypłata z tego funduszu w okresie roku, tzn. 52 tygodni, przekroczy 70 000 zł.

11. Czas oczekiwania na autobus linii A jest zmienną losową o rozkładzie wykładni–czym z wartością oczekiwaną równą 10 minut. Pani X codziennie dojeżdża do pracy autobusem A. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pani X:
a) traci kwartalnie na czekanie na autobus A więcej niż 910 minut (przyjmujemy, że kwartał ma 90 dni),
b) średnio dziennie w kwartale traci więcej niż 9 minut na czekanie na autobus A.

12. Czas pracy lampy pewnego typu ma rozkład wykładniczy o średniej 900 godz. Ile lamp trzeba mieć w zapasie, aby wystarczyło ich na co najmniej 4 lata nieprzerwanej pracy z prawdopodobieństwem 0.99? Przyjmujemy, że spalona lampa jest natychmiast wymieniana na nową.

13. Przy opracowaniu danych statystycznych trzeba było dodać 10^4 liczb, z których każda była dana z dokładnością do 10^{-m}. Zakładając, że błędy zaokrągleń są wzajemnie niezależne i mają rozkład jednostajny na przedziale $(-0.5 \cdot 10^{-m}, 0.5 \cdot 10^{-m})$, znaleźć granice w których zawierać się będzie łączny błąd z prawdopodobieństwem większym niż 0.997.

14. Z partii towaru o wadliwości 3% pobrano próbę 500 elementową. Korzystając z centralnego twierdzenia granicznego oszacować prawdopodobieństwo tego, że liczba wadliwych elementów w próbie (a) nie przekroczy 3 elementów; (b) nie przekroczy 4%; (c) przekroczy 9%.

15. Prawdopodobieństwo uzyskania wygranej w pewnej grze liczbowej wynosi 0.1. Obliczyć prawdopodobieństwo, że spośród 500 grających osób wygra więcej niż 60 osób.

16. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca jest równe 0.515. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród 1000 noworodków będzie co najwyżej 480 dziewczynek ?

17. W pewnej populacji małży 80% osobników jest zarażonych pewnym pasożytem. Biolog pobiera losową próbę 50 osobników. Stosując przybliżenie rozkładem normalnym oszacuj p-stwo, że mniej niż 35 spośród wybranych osobników będzie zakażonych. Wykonaj obliczenia dwa razy: bez poprawki na ciągłość i uwzględniając tą poprawkę.

18. W celu oszacowania dokładności wskazań pewnego przyrządu zmierzono wielkość wzorcową 1000 razy. Niech $X_i, \quad i = 1, ..., 1000$ oznaczają błędy wskazań. Jako oszacowania σ^2 przyjęto $\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{1000}(X_1^2 + ... + X_{1000}^2)$. Obliczyć prawdopodobieństwo tego, że błąd oszacowania tj. $|\bar{\sigma}^2 - \sigma^2|$ nie przekroczy 5% rzeczywistej wartości σ^2. Przyjąć $EX_1^4 = 2\sigma^4$.

19. Mamy dany odcinek $[\alpha, \beta]$ i określoną na nim funkcję $f(x)$ spełniającą warunek $|f(x)| < a$. Aby oszacować całkę $I = \int_\alpha^\beta f(x)dx$ metodą Monte Carlo, postępuje się następująco: z rozkładu jednostajnego na odcinku $[\alpha, \beta]$ losujemy niezależnie N wartości. Jeśli wygenerowaliśmy wartości $x_1, ..., x_N$, to za oszacowanie I przyjmujemy
$$I_N = \frac{\beta - \alpha}{N} \sum_{i=1}^{N} f(x_i).$$
Obliczyć $\mathrm{E}I_N$ oraz $\mathrm{Var}I_N$. Podać przybliżoną wartość prawdopodobieństwa $P(|I_N - I| \geq \varepsilon)$. Jakie powinno być N, aby dla zadanego ε to prawdopodobieństwo nie przekraczało z góry zadanej liczby?

20. Metodą Monte Carlo oszacować całkę
$$\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$