Wykład II: Prawdopodobieństwo Warunkowe i Niezależność Zdarzeń

Alicja Janic

Politechnika Wrocławska *alicja.janic@pwr.edu.pl*

12 październik 2020

Prawdopodobieństwo warunkowe

Definicja

Niech $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, a B - dowolnie ustalonym zdarzeniem takim, że $P(B) > 0$. Prawdopodobienstwo warunkowe zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Prawdopodobieństwo warunkowe - wnioski

Wniosek 1

Jeżeli $P(B) > 0$, to funkcja $P(\cdot|B)$ określona na $\mathcal{F}$ spełnia aksjomaty prawdopodobieństwa

Wniosek 2

Niech A i B będą dowolnymi zdarzeniami takimi, że $P(A) > 0$ oraz $P(B) > 0$. Wówczas $P(A \cap B) = P(A|B)P(B) = P(B|A)P(A)$

Wniosek 3

Posługując się zasadą indukcji matematycznej możemy udowodnić, że dla dowolnego n, przy założeniu, że $P(A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}) > 0$, prawdziwa jest równość $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) =$

$$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

Przykłady

Przykład 1

Rzucamy dwa razy symetryczną kostką.
a) Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia różnej liczby oczek?
b) Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia różnej liczby oczek, jeżeli suma oczek wynosi 11?
c) Jakie jest prawdopodobieństwo wyrzucenia różnej liczby oczek, jeżeli suma oczek wynosi 10?

Rozwiązanie

Przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω jest zbiorem par uporządkowanych (a, b), gdzie $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Są to wariacje 2-elementowe zbioru 6-elementowego z powtórzeniami. Wszystkie zdarzenia elementarne są jednakowo prawdopodobne. a) Niech A oznacza zdarzenie "wypadła różna liczba oczek", czyli wariacje 2-elementowe zbioru 6-elementowego bez powtórzeń:

$$A = \{(a, b) \in \Omega : \; a \neq b\} = \Omega \setminus \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

Ponieważ $\#\Omega = 6^2 = 36$ oraz $\#A = 36 - 6 = 30$, więc $P(A) = 30/36 = 5/6$. b) Zdarzenie "suma oczek wynosi 11" oznaczmy przez B. Oczywiście $B = \{(5, 6), (6, 5)\}$. Ponieważ $B \subset A$, więc $B \cap A = B$ i stąd $P(A|B) = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$. W tym przykładzie informacja o zdarzeniu B dawała pewność, że zajdzie zdarzenie A

Przykłady

Przykład 2

Studenci Wydziału Elektroniki muszą zdać w I semestrze trzy egzaminy: z fizyki (A), analizy matematycznej (C) i z algebry (B). Z danych Dziekanatu wynika, że 70% studentów zalicza I semestr a 90% - zdaje egzamin z fizyki. Jeżeli student zaliczy algebrę i fizykę, to prawdopodobieństwo, że zda analizę wynosi $\frac{4}{5}$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że student, który zdał fizykę, zda algebrę?

Rozwiązanie

Skorzystamy ze wzoru

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|A \cap B).$$

Mamy

$$\frac{7}{10} = \frac{9}{10} \cdot P(B|A) \cdot \frac{4}{5},$$

skąd $P(B|A) = \frac{35}{36}$

Układ zupełny zdarzeń elementarnych

Definicja

Mówmimy, że zdarzenia $B_1, B_2, \ldots, B_n$ tworzą podział przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω (Ω jest sumą rozłącznych zbiorów $B_i \in \mathcal{F}$ dla $i = 1, \ldots, n$), jeżeli

$$B_i \cap B_j = \emptyset, \quad \text{gdy } i \neq j \qquad \text{oraz} \qquad \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$$

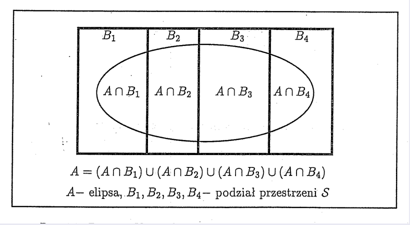

Figura: *Diagran Venna ilustrujący twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym*

Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Twierdzenie

Jeżeli Ω *jest sumą rozłącznych zbiorów* B_i, *przy czym* $P(B_i) > 0$ *dla wszystkich* $i = 1, \ldots, n$, *to dla dowolnego zdarzenia* A *zachodzi równość*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)$$

Dowód: Zauważmy, że zdarzenia $(A \cap B_1), (A \cap B_2), \ldots, (A \cap B_n)$ wzajemnie się wykluczają:

$$\begin{aligned} P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap [B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n]) &= \\ = P((A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \ldots \cup (A \cap B_n)) &= \\ = \textstyle\sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i) & \end{aligned}$$

.

Wzór Bayesa

Czasem zdarzenia B_i występujące we wzorze na prawdopodobieństwo całkowite nazywamy przyczynami a zdarzenie A - skutkiem. Rozważmy zagadnienie odwrotne: zapytajmy, jakie jest prawdopodobieństwo przyczyny B_i, gdy znany jest skutek A?

Twierdzenie

Jeżeli Ω jest sumą rozłącznych zbiorów B_i, przy czym $P(B_i) > 0$ dla wszystkich $i = 1, ..., n$, to dla dowolnego zdarzenia A, takiego że $P(A) > 0$, zachodzi równość

$$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Przykłady

Przykład 3

Przeciętnie 3% wyprodukowanych elementów ma wadę. Do wykrywania wady stosuje się test, który z prawdopodobieństwem 0.9 wskazuje wadę (wynik testu pozytywny), jeżeli element ma wadę i z prawdopodobieństwem 0.95 nie wskazuje wady, jeżeli element jej nie ma.
a) Jakie jest prawdopodobieństwo, że element ma wadę, jeżeli wynik testu jest pozytywny?
b) Jakie jest powyższe prawdopodobieństwo, jeżeli wynik testu jest negatywny?

Rozwiązanie

a) Oznaczmy przez W zdarzenie "element ma wadę" i przez N zdarzenie "element nie ma wady". Zdarzenia te są rozłączne,

$W \cup N = \Omega$ oraz $P(W) = 0.03$, $P(N) = 0.97$

Niech D oznacza zdarzenie "wynik testu jest pozytywny". Z danych zawartych w zadaniu wynika, że

$P(D|W) = 0.9$, $P(D'|N) = 0.95$ $P(D|N) = 1 - P(D'|N)$

Do obliczenia prawdopodobieństwa zdarzenia "element ma wadę, jeżeli wynik testu był pozytywny", czyli prawdopodobieństwa warunkowego $P(W|D)$ wykorzystamy wzór Bayesa

$$P(W|D) = \frac{P(D|W)P(W)}{P(D|W)P(W)+P(D|N)P(N)} = \frac{0.9 \cdot 0.03}{0.9 \cdot 0.03 + 0.05 \cdot 0.97} = 0.358$$

Przykłady

Przykład 4

Na stole leży 5 długopisów. Każde przypuszczenie (hipoteza) dotyczące liczby zepsutych długopisów jest jednakowo prawdopodobne. Wybrany losowo długopis okazał się zepsuty. Które przypuszczenie dotyczące liczby zepsutych długopisów jest teraz najbardziej prawdopodobne?

Rozwiązanie

Oznaczmy przez H_i hipotezę, że liczba zepsutych długopisów wynosi i, $\ i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Mamy $P(Hi) = \frac{1}{6}$. Niech A oznacza zdarzenie "wylosowany długopis jest zepsuty", wówczas $P(A|H_i) = \frac{i}{5}$. Zatem, ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite otrzymujemy

$$P(A) = \sum_{i=0}^{5} \frac{i}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

a stąd

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|Hi) \cdot P(Hi)}{P(A)} = \frac{\frac{i}{5}\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{i}{15}$$

Przy warunku, że wylosowano zepsuty długopis najbardziej prawdopodobne jest, że wszystkie długopisy są zepsute.
$P(H_i)$ prawdopodobieństwa przed doświadczeniem - **a priori**,
$P(H_i|A)$ prawdopodobieństwa po doświadczeniu - **a posteriori**

Niezależność zdarzeń

Definicja

Dwa zdarzenia A i B nazywamy niezależnymi, jeżeli

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Jeżeli $P(B) > 0$, to z niezależności zdarzeń A i B wynika, że $P(A|B) = P(A)$. Dla dowolnego $A \in \mathcal{F}$ zdarzenia A i Ω są niezależne. Podobnie - zdarzenia A i $\emptyset$ są niezależne. Jeżeli zdarzenia A i B są rozłączne i mają niezerowe prawdopodobieństwa, to nie mogą być niezależne.

Definicja

Zdarzenia $A_1, A_2, A_3, \ldots$ nazywamy rodziną zdarzeń niezależnych, jeżeli dla każdej skończonej ilości zdarzeń $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$ z tej rodziny, gdzie $n \geqslant 2$, zachodzi równość

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_n})$$

Niezależność zdarzeń - wnioski

Wniosek 1

Jeżeli zdarzenia A i B są niezależne, to także niezależne są pary zdarzeń A' i B, A i B' oraz A' i B'

Wniosek 2

Jeżeli zdarzenia $A_1, A_2, ..., A_n$ są niezależne, to niezależne są także zdarzenia $B_1, B_2, ..., B_n$, gdzie $B_i = A_i$ lub $B_i = A_i'$ dla $i = 1, 2, ..., n$

Przykłady

Przykład 5

Trzech kontrolerów jakości pracuje niezależnie. Pierwszy wykrywa 90% wad, drugi - 80% a trzeci - 60%. Jaki procent wad wykrywają łącznie? Jaki procent wad wykrywa trzeci kontroler a nie wykrywa pierwszy ani drugi?

Rozwiązanie

Niech A_i oznacza zdarzenie "wadę wykrył i-ty kontroler". Wówczas: $P(A_1) = \frac{9}{10}$, $P(A_2) = \frac{8}{10}$, $P(A_3) = \frac{6}{10}$. a) Wada zostanie wykryta, gdy zajdzie zdarzenie $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Wykorzystując wzór na prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego oraz prawa de Morgana otrzymujemy

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(A_1' \cap A_2' \cap A_3').$$

Ponieważ z niezależności zdarzeń A_1, A_2, A_3 wynika niezależność zdarzeń A_1', A_2', A_3' więc

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(A_1')P(A_2')P(A_3') = 1 - 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,4 = 0,992.$$

Zatem łącznie kontrolerzy wykrywają 99,2% wad. b) Zdarzenie "spośród trzech kontrolerów wadę wykrył tylko trzeci kontroler" można zapisać jako zdarzenie A $A_1' \cap A_2' \cap A_3$. Ponieważ te trzy zdarzenia są niezależne, więc

$$P(A_1' \cap A_2' \cap A_3) = 0,1 \cdot 0,2 \cdot 0,6 = 0,012$$

Przykłady

Przykład 6

Wybieramy jedną rodzinę spośród rodzin, mających n dzieci. Niech zdarzenie A polega na tym, że w losowo wybranej rodzinie jest co najwyżej jedna dziewczynka, B - w rodzinie są dziewczynki i chłopcy. Czy zdarzenia A i B są niezależne?

Rozwiązanie

Przyjmując, że dzieci w rodzinie uporządkowane są np. według starszeństwa, oznaczmy przez Ω zbiór ciągów n-elementowych o elementach 0 (dziewczynka) i 1 (chłopiec). Wówczas

$$\#\Omega = 2^n, \qquad \#A = n+1, \qquad B = 2^n - 2, \qquad \#A \cap B = n$$

Zatem

$$P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}, \qquad P(A) \cdot P(B) = \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2^n - 2}{2^n}$$

i równość zachodzi, gdy $2^n = 2n + 2$. Ostatecznie otrzymujemy niezależność zdarzeń tylko dla $n = 3$