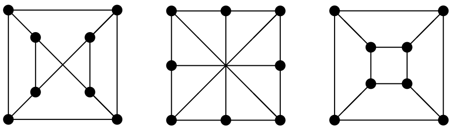
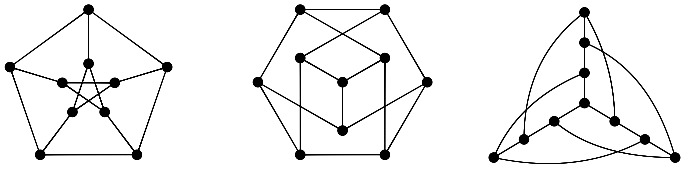
LISTA 1. GRAFY I PRAWDOPODOBIEŃSTWO

1. Ile jest grafów prostych etykietowanych o wierzchołkach 1, 2 oraz 3? Narysuj je. Ile jest grafów prostych nieetykietowanych o trzech wierzchołkach?

2. Ile jest wszystkich grafów prostych etykietowanych o n wierzchołkach? A o n wierzchołkach i m krawędziach?

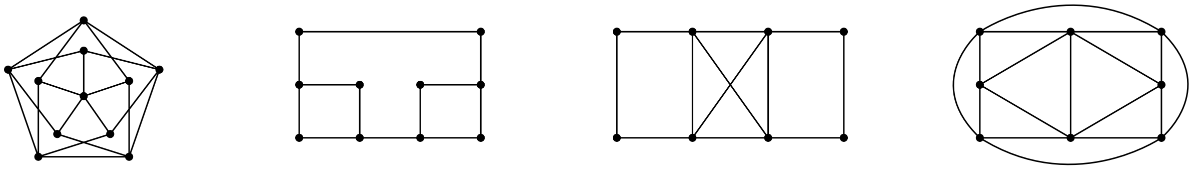
3. Dla każdej pary spośród poniższych grafów wskaż izomorfizm lub uzasadnij jego brak:

(a)

(b)


4. Dla jakich n istnieje graf prosty n-wierzchołkowy, w którym każdy wierzchołek ma stopień 3?

5. Uzasadnij, że jeśli $G = (V, E)$ jest grafem prostym i $|V| \geq 2$, to V zawiera co najmniej dwa wierzchołki tego samego stopnia.

6. Które z poniższych grafów są eulerowskie, a które hamiltonowskie?



7. Uzasadnij, że w dowolnej grupie sześciu osób zawsze istnieją albo trzy osoby znające się nawzajem, albo trzy osoby, z których żadna nie zna pozostałych dwóch. Sprawdź również, że istnieje taka grupa pięciu osób, w której nie ma ani trzech osób znających się nawzajem, ani trzech osób takich, że żadna z nich nie zna dwóch pozostałych.

8. Ile jest wszystkich kopii grafu K_l w grafie K_n, gdzie $1 \leq l \leq n$?

9. Niech K będzie ustaloną kliką o 4 wierzchołkach w grafie K_n, gdzie $n \gg 4$.

   (1) Ile jest klik o 4 wierzchołkach w grafie K_n, które mają $i = 0, 1, 2, 3, 4$ wspólnych wierzchołków z K?

   (2) Ile wspólnych krawędzi z K ma każda z takich klik?

   A jak to będzie ogólnie, gdy K jest ustaloną kliką o l wierzchołkach w grafie K_n, gdzie $1 \leq l \ll n$?

10. Uzasadnij następujące nierówności:

   (1) $1 + x \leq e^x$, $x \in \mathbb{R}$;

   (2) $1 - x \geq e^{-x/(1-x)}$, $0 \leq x < 1$.

11. Zmienna losowa X o rozkładzie dwumianowym $B(N, p)$ ma wartość oczekiwaną 12 i wariancję 4. Wyznacz N i p.

12. Rzucamy uczciwą kostką sześcienną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że w 12 rzutach co najmniej 8 razy wyrzucimy liczbę pierwszą oczek? Jeśli wykonujemy 12 rzutów, to jaka jest wartość oczekiwana i wariancja zmiennej losowej X opisującej liczbę tych rzutów, w wyniku których uzyskaliśmy liczbę pierwszą oczek?

13. Niech $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N\}$ będzie zbiorem skończonym i niech liczby $p_1, p_2, ..., p_N$ spełniają $p_i \geq 0$ oraz $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$. Definiujemy $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) = p_i$, dla $i = 1, 2, ..., N$. Pokaż, że tak określona funkcja rozszerza się jednoznacznie do prawdopodobieństwa na $(\Omega, 2^{\Omega})$.

14. Udowodnij następujące nierówności:

    (1) (nierówność Markowa) Jeśli X jest nieujemną zmienną losową, to
    $$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}X}{t}, \quad t > 0.$$

    (2) (nierówność Czebyszewa) Jeśli X jest zmienną losową o skończonej wartości oczekiwanej i wariancji, to
    $$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq t) \leq \frac{\mathbb{V}arX}{t^2}, \quad t > 0.$$

    (3) (nierówność Paleya-Zygmunda) Jeśli X jest nieujemną zmienną losową o skończonej wariancji i $\lambda \in [0, 1]$, to
    $$\mathbb{P}(X \geq \lambda \mathbb{E}X) \geq (1 - \lambda)^2 \frac{(\mathbb{E}X)^2}{\mathbb{E}X^2}.$$