LISTA 2. MODELE GRAFÓW LOSOWYCH

1. Przygotuj na ćwiczenia monetę i kilka kopii rysunku przedstawiającego graf K_5 oraz kolorowy flamaster lub długopis. Na ćwiczeniach będziemy wielokrotnie generować dwumianowy graf losowy (przy pomocy monety...)

2. Niech $n \gg 1$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że dwumianowy graf losowy $\mathbb{G}_{n,p}$

   (a) jest grafem pełnym/pustym?

   (b) zawiera ustaloną ścieżkę złożoną z krawędzi $e_1, e_2, ..., e_l$, gdzie $1 \leq l \leq n$?

   (c) zawiera ustaloną drogę $v_1 \to v_2 \to ... \to v_l$, gdzie $1 \leq l \leq n$?

   (d) zawiera ustaloną klikę o l wierzchołkach, gdzie $1 \leq l \leq n$?

   (e) zawiera ustalony podgraf G grafu K_n?

3. Niech v będzie ustalonym wierzchołkiem grafu losowego i niech X_v będzie zmienną losową opisującą stopień v, tzn. $X_v = \deg(v)$. Znajdź rozkład X_v dla obydwu modeli grafów losowych $\mathbb{G}_{n,p}$ i $\mathbb{G}_{n,m}$. *Wskazówka: w drugim przypadku będzie to rozkład hipergeometryczny (z jakimi parametrami?).*

4. Niech $\{C_1, C_2, ..., C_M\}$ będzie ciągiem wszystkich kopii grafu K_l w grafie K_n, gdzie $1 \leq l \ll n$. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{M} \mathbb{P}(C_k \in \mathbb{G}_{n,p}, C_i \in \mathbb{G}_{n,p}) = \sum_{k=1}^{M} \mathbb{P}(C_k \in \mathbb{G}_{n,p}, C_j \in \mathbb{G}_{n,p}),$$

   dla dowolnych $i, j = 1, 2, ..., M$. *Wskazówka: skorzystaj z zadania 9 na liście 1.*

5. Niech X będzie zmienną losową opisującą

   (a) liczbę krawędzi w grafie losowym $\mathbb{G}_{n,p}$;

   (b) liczbę krawędzi w grafie $\mathbb{G}_{2n,p} \cup K_{n,n}$;

   (c) liczbę krawędzi w grafie $\mathbb{G}_{2n,p} \cap K_{n,n}$;

   (d) stopień ustalonego wierzchołka w grafie losowym $\mathbb{G}_{n,p}$;

   (e) stopień ustalonego wierzchołka w grafie losowym $\mathbb{G}_{n,m}$;

   (f) liczbę kopii grafu K_4 w grafie losowym $\mathbb{G}_{n,p}$, gdzie $n \gg 4$?

   (g) liczbę kopii grafu K_l w grafie losowym $\mathbb{G}_{n,p}$, gdzie $1 \leq l \ll n$?

   W każdym przypadku wyznacz $\mathbb{E}X$ oraz $\mathbb{V}arX$ (w podpunktach (f)-(g) zamiast $\mathbb{V}arX$ wyznacz $\mathbb{E}X^2$; wykorzystaj poprzednie zadanie).

6. (Liczby Ramseya) Wprowadźmy dwie definicje.

   Dwukolorowaniem (krawędziowym) grafu prostego $G = (V, E)$ nazywamy dowolną funkcję $h : E \to \{R, B\}$.

   Liczbą Ramseya $R(k, l)$ nazywamy najmniejszą liczbą naturalną n taką, że dla każdego dwukolorowania h grafu pełnego K_n istnieje klika o k wierzchołkach, której wszystkie krawędzie są pokolorowane na czerwono (R), lub istnieje klika o l wierzchołkach, której wszystkie krawędzie są pokolorowane na niebiesko (B).

   TWIERDZENIE (Erdős, 1947) Dla każdego naturalnego k,

$$R(k,k) > \frac{k}{e\sqrt{2}} 2^{\frac{k}{2}} \left(1 - \frac{\log 2}{k}\right).$$

   Udowodnij powyższe (deterministyczne) twierdzenie wykorzystując dwumianowy model grafu losowego $\mathbb{G}_{n,1/2}$ (tzw. metoda probabilistyczna).

7. Przypomnij na czym polega technika sprzęgania (couplingu) dla grafów losowych $\mathbb{G}_{n,p}$. Następnie udowodnij, że dla dowolnej wstępującej własnośc grafowej $\mathcal{P}$ i $0 \le p_1 \le p_2 \le 1$ zachodzi nierówność

$$\mathbb{P}(\mathbb{G}_{n,p_1} \in \mathcal{P}) \le \mathbb{P}(\mathbb{G}_{n,p_2} \in \mathcal{P}).$$

8. Wytłumacz na czym polega technika sprzęgania (couplingu) dla grafów losowych $\mathbb{G}_{n,m}$. Następnie uzasadnij, że dla dowolnej wstępującej własnośc grafowej $\mathcal{P}$ i $m_1 < m_2$ zachodzi nierówność

$$\mathbb{P}(\mathbb{G}_{n,m_1} \in \mathcal{P}) \le \mathbb{P}(\mathbb{G}_{n,m_2} \in \mathcal{P}).$$

9. Niech $\mathcal{P}$ będzie wstępującą własnością grafową i $p = m/\binom{n}{2}$. Jeśli $m \to \infty$ i $\frac{\binom{n}{2}-m}{\sqrt{m}} \to \infty$, gdy $n \to \infty$, to dla dużych n zachodzi nierówność

$$\mathbb{P}(\mathbb{G}_{n,m} \in \mathcal{P}) \le 3\mathbb{P}(\mathbb{G}_{n,p} \in \mathcal{P}).$$

   Wskazówka: początek dowodu przebiega podobnie jak w Lemacie 2.2 z wykładu. Dalej argument opiera się na zastosowaniu poprzedniego zadania, nierówności z zadania 10 na liście 1 i bezpośredniej analizie asymptotycznej (por. Lemat 1.3 w podręczniku Frieze i Karońskiego).