GRAFY I SIECI LOSOWE, WYDZIAŁ MATEMATYKI (27 X 2022)

LISTA 3. PROGI WŁASNOŚCI GRAFOWYCH

1. Podaj przykład ciągu nieujemnych zmiennych losowych $X_1, X_2, ...$ o wartościach całkowitych takiego, że $\mathbb{E}X_n \to \infty$ oraz

   (a) $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > 0) < 1$,

   (b) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n > 0) = 1$.

2. Niech (a_n) będzie ciągiem nieujemnych liczb całkowitych takim, że $a_n \to \infty$, gdy $n \to \infty$, i niech X będzie zmienną losową zliczającą krawędzie w grafie losowym $\mathbb{G}_{n,p}$. Wykaż, że jeśli $\mathbb{E}X = o(a_n)$, gdy $n \to \infty$, to graf $\mathbb{G}_{n,p}$ zawiera co najwyżej a_n krawędzi z dużym prawdopodobieństwem.

3. Znajdź próg p^* własności grafowej

   (a) $\mathcal{P} = \{G : G \text{ jest niepusty}\}$ w grafie losowym $\mathbb{G}_{2n,p} \cap K_{n,n}$,

   (b) $\mathcal{P} = \{G : G \text{ ma co najmniej } n^2 + 1 \text{ krawędzi}\}$ w grafie losowym $\mathbb{G}_{2n,p} \cup K_{n,n}$.

4. Niech v będzie ustalonym wierzchołkiem i niech X_v będzie zmienną losową opisującą stopień v w grafie losowym $\mathbb{G}_{n,p}$. Wykaż, że jeśli $np \to \infty$, to dla dowolnego ciągu $\lambda_n \to 0^+$ nierówność $X_v \geq \lambda_n(n-1)p$ zachodzi z dużym prawdopodobieństwem. *Wskazówka: wykorzystaj nierówność Paleya-Zygmunda.*

5. Udowodnij, że jeśli $\frac{m}{n} \to \infty$, gdy $n \to \infty$, to $\mathbb{G}_{n,m}$ zawiera co najmniej jeden trójkąt z dużym prawdopodobieństwem.

6. Udowodnij, że $p^* = n^{-2/3}$ jest progiem własności grafowej $\mathcal{P} = \{G : G \text{ zawiera kopię grafu } K_4\}$.

7. Wyznacz próg m^* własności grafowej z poprzedniego zadania w grafie losowym $\mathbb{G}_{n,m}$.

8. Niech $X = I_1 + ... + I_n$, gdzie $I_1, ..., I_n$ są zmiennymi losowymi o wartościach w zbiorze $\{0, 1\}$ i $n \in \mathbb{N}$. Jeśli istnieje liczba $a \geq 1$ taka, że

   $$\mathbb{P}(I_i = 1, I_j = 1) \leq a\,\mathbb{P}(I_i = 1)\,\mathbb{P}(I_j = 1), \quad \text{dla dowolnych } \; i, j = 1, ..., n,$$

   to

   $$\mathbb{P}(X \geq 1) \geq \frac{1}{a + \frac{1}{\mathbb{E}X}}.$$

   Wskazówka: zastosuj mocną metodę drugiego momentu.

9. Niech $X_1, X_2, ...$ będzie ciągiem zmiennych losowych postaci $X_k = I_1^k + ... + I_k^k$, gdzie I_i^k są zmiennymi losowymi o wartościach w zbiorze $\{0, 1\}$ (dla każdego k ciąg zmiennych losowych $I_1^k, I_2^k, ..., I_k^k$ może być inny). Korzystając z poprzedniego zadania, sformułuj (możliwie najogólniejsze) założenie, przy którym zachodzi implikacja:

   $$\mathbb{E}X_n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad X_n > 0 \text{ z dużym prawdopodobieństwem}$$

   (porównaj z zadaniem 1).