GRAFY I SIECI LOSOWE, WYDZIAŁ MATEMATYKI (18 XI 2022)

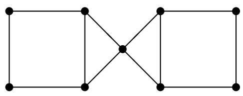
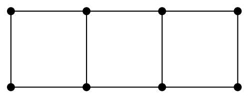
LISTA 4. DRZEWA, LASY I KRÓTKIE ŚCIEŻKI

1. Uzasadnij, że drzewo o n wierzchołkach ma dokładnie $n-1$ krawędzi.

2. Narysuj wszystkie drzewa spinające grafów K_3 oraz $K_{2,3}$.

3. Wyznacz liczbę drzew spinających grafu $K_{2,n}$.

4. Ile drzew spinających ma:

   (a) cykl C_n; (b) graf czworościanu; (c)  (d) 

5. Dwa cykle C_n i C_m sklejamy: (a) wspólnym wierzchołkiem; (b) wspólną krawędzią. Ile drzew spinających ma otrzymany graf?

6. Udowodnij twierdzenie Cayleya: istnieje dokładnie n^{n-2} różnych drzew etykietowanych o n wierzchołkach.

7. Uzasadnij, że gdy $m = o(n)$, to graf losowy $\mathbb{G}_{n,m}$ jest lasem z dużym prawdopodobieństwem.

8. Udowodnij, że:

   (a) gdy $m = o(\sqrt{n})$, to $\mathbb{G}_{n,m}$ składa się z izolowanych wierzchołków i krawędzi z dużym prawdopodobieństwem,

   (b) gdy $n = o(m^2)$, to $\mathbb{G}_{n,m}$ zawiera ścieżkę długości 2 z dużym prawdopodobieństwem.

   Wywnioskuj stąd, że $m^* = \sqrt{n}$ jest progiem własności, że graf losowy $\mathbb{G}_{n,m}$ zawiera ścieżkę długości 2.

9. Niech $k \geq 3$. Udowodnij, że:

   (a) gdy $m = o\big(n^{\frac{k-2}{k-1}}\big)$, to $\mathbb{G}_{n,m}$ nie zawiera żadnego drzewa o k wierzchołkach z dużym prawdopodobieństwem,

   (b) gdy $n = o(m^{\frac{k-1}{k-2}})$, to $\mathbb{G}_{n,m}$ zawiera kopię dowolnego ustalonego drzewa o k wierzchołkach z dużym prawdopodobieństwem.

   Wywnioskuj stąd, że $m^* = n^{\frac{k-2}{k-1}}$ jest progiem własności, że graf losowy $\mathbb{G}_{n,m}$ zawiera drzewo o k wierzchołkach.