GRAFY I SIECI LOSOWE, WYDZIAŁ MATEMATYKI (18 XI 2022)

LISTA 5. METODA MOMENTÓW DWUMIANOWYCH I SKOJARZENIA

1. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i dowolny ciąg zdarzeń $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}$. Wielomianem Boole'a $f(A_1, ..., A_n)$ stopnia n zmiennych $A_1, A_2, ..., A_n$ nazwiemy funkcję o wartościach w $\mathcal{F}$, która zawiera sumy, przekroje i dopełnienia tych zbiorów. Udowodnij następujący lemat:

   Lemat (Rényi) Niech $f_1, ..., f_k$ będą ustalonymi wielomianami Boole'a stopnia n, zmiennych $A_1, A_2, ..., A_n$, a $c_1, ..., c_k$ ustalonymi liczbami rzeczywistymi. Oznaczmy $B_i = f_i(A_1, ..., A_n)$, $i = 1, ..., k$. Jeśli nierówność
   $$\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbb{P}(B_i) \geq 0$$
   jest spełniona dla zdarzeń $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$ takich, że $\mathbb{P}(A_j) \in \{0, 1\}$, to jest ona spełniona dla dowolnych zdarzeń $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}$.

2. Zastosuj powyższy lemat do dowodu następującego twierdzenia sformułowanego na wykładzie:

   Twierdzenie (Metoda momentów dwumianowych) Niech $S_n = \sum_{i=1}^{n} I_i^{(n)}$, gdzie $I_i^{(n)}$ są zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie Bernoulliego (przy ustalonym $n \geq 1$). Jeśli istnieje $\lambda > 0$ taka, że
   $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\binom{S_n}{k} = \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 1, 2, \dots,$$
   to $S_n \xrightarrow{d} \text{Poiss}(\lambda)$, gdy $n \to \infty$, tzn. $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(S_n = j) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^j}{j!}$, dla każdego $j = 1, 2, \dots$.

3. Niech X_0 będzie zmienną losową zliczająca wierzchołki izolowane w dwudzielnym grafie losowym dwumianowym $\mathbb{G}_{n,n,p}$. Udowodnij, że jeśli $p = (\log n + \omega(n))/n$, gdzie $\omega(n) \to c \in \mathbb{R}$, gdy $n \to \infty$, to $X_0 \xrightarrow{d} \text{Poiss}(2e^{-c})$, gdy $n \to \infty$.

4. Udowodnij poniższe twierdzenie charakteryzacyjne:

   Twierdzenie (Hall) Niech $G = (V_1, V_2, \varphi)$ będzie grafem dwudzielnym o funkcji połączeń φ. Wówczas w grafie G istnieje skojarzenie całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek Halla: $|\varphi(A)| \geq |A|$, dla dowolnego $A \subseteq V_1$.

5. Niech $G = (V_1, V_2, \varphi)$ będzie grafem dwudzielnym o funkcji połączeń φ takim, że $|V_1| = |V_2| = n$. Wówczas jeśli
   $$\text{dla dowolnego } A \subset V_1 \text{ takiego, że } |A| \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \text{ mamy } |\varphi(A)| \geq |A|$$
   oraz
   $$\text{dla dowolnego } B \subset V_2 \text{ takiego, że } |B| \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \text{ mamy } |\varphi(B)| \geq |B|,$$
   to zachodzi warunek Halla.

6. Niech $G = (V_1, V_2, \varphi)$ będzie grafem dwudzielnym o funkcji połączeń φ takim, że $|V_1| = |V_2| = n$. Z poprzedniego zadania wynika, że gdy warunek Halla nie zachodzi, to istnieje S, podzbiór V_1 lub V_2, dla którego $|\varphi(S)| < |S|$. Niech S będzie takim podzbiorem o najmniejszej możliwej mocy (tzw. minimalnym zbiorem, który nie spełnia warunku Halla). Wykaż, że:

   (a) $|S| = |\varphi(S)| + 1$,

   (b) każdy wierzchołek $v \in \varphi(S)$ ma co najmniej dwóch sąsiadów w S.