LISTA 6. STOPNIE WIERZCHOŁKÓW

1. Niech $p = c/n$, dla pewnej stałej $c > 0$, oraz niech X_d będzie zmienną losową zliczającą wierzchołki stopnia d w grafie losowym $\mathbb{G}_{n,p}$. Udowodnij, że dla każdego $d \in \mathbb{N}$ istnieje stała C, dla której
$$\mathbb{P}(|X_d - \mathbb{E}X_d| \geq t\sqrt{n}) \leq \frac{C}{t^2}, \quad t > 0.$$
Wywnioskuj stąd, że dla każdego $d \in \mathbb{N}$
$$\frac{X_d}{n} \longrightarrow \frac{c^d e^{-c}}{d!}, \quad \text{gdy} \;\; n \to \infty,$$
według prawdopodobieństwa. *Wskazówka: dowód Twierdzenia 3.3 w podręczniku Frieze i Karońskiego.*

2. Niech $p = c/n$, dla pewnej stałej $c > 0$, oraz niech X_d będzie zmienną losową zliczającą wierzchołki stopnia d w grafie losowym $\mathbb{G}_{n,p}$. Wykaż, że gdy
$$d = \frac{\log n}{\log\log n + 2\log\log\log n},$$
to $X_d > 0$ z dużym prawdopodobieństwem. *Wskazówka: udowodnij analogiczną nierówność Czebyszewa jak w poprzednim zadaniu.*

3. Udowodnij nierówność **Chernoffa-Hoeffdinga**: niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych takich, że $0 \leq X_i \leq 1$, $i = 1, 2, ..., n$. Oznaczmy: $S = X_1 + ... + X_n$ oraz $\mu = \mathbb{E}S$. Wówczas zachodzą nierówności:
$$\mathbb{P}(S \geq \mu + t) \leq e^{-\frac{t^2}{2(\mu + t/3)}}, \quad t \geq 0,$$
oraz
$$\mathbb{P}(S \leq \mu - t) \leq e^{-\frac{t^2}{2(\mu - t/3)}}, \quad 0 \leq t \leq \mu.$$