GRAFY I SIECI LOSOWE, WYDZIAŁ MATEMATYKI (4 I 2023)

LISTA 7. KOLOROWANIE WIERZCHOŁKÓW I MARTYNGAŁY

Twierdzenie Eulera z roku 1750 (zwane *twierdzeniem o wielościanach* – dlaczego?) orzeka, że jeśli n, m i f oznaczają odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian spójnego grafu planarnego G, to $n - m + f = 2$ (jest to tzw. wzór Eulera, zob. np. twierdzenie 13.1 w podręczniku Wilsona, wyd. II).

1. Narysuj wszystkie grafy platońskie. (Ile ich jest? Dlaczego tak się nazywają?) Następnie sprawdź wzór Eulera na przykładzie każdego z tych grafów.

2. Korzystając ze wzoru Eulera, uzasadnij następujące własności:

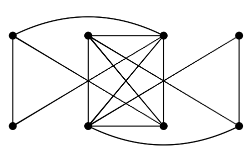
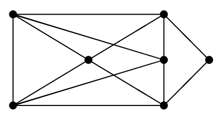
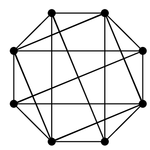
   (1) Jeśli G jest spójnym planarnym grafem prostym o n wierzchołkach ($n \geq 3$) i m krawędziach, to $m \leq 3n - 6$.

   (2) Każdy planarny graf prosty zawiera wierzchołek stopnia co najwyżej 5 (jest to lemat, który wykorzystaliśmy w dowodzie twierdzenia o 5 kolorach).

   Wskazówka: wniosek 13.4 (1) i twierdzenie 13.6 w podręczniku Wilsona, wyd. II.

3. Wyznacz liczby chromatyczne grafu Petersena i grafów platońskich.

4. Wyznacz liczby chromatyczne grafów: C_n, K_n, $K_{n,m}$ oraz poniższych grafów.

5. Udowodnij nierówność **Azumy-Hoeffdinga**: niech ciąg zmiennych losowych $X_0, X_1, X_2, ..., X_n$ będzie martyngałem o ograniczonych przyrostach: $|X_k - X_{k-1}| \leq c_k$, $k = 1, 2, ..., n$, dla pewnych liczb dodatnich $c_1, ..., c_n$, oraz niech zmienna losowa X_0 będzie stała. Wówczas zachodzi nierówność:
$$\mathbb{P}(|X_n - \mathbb{E}X_n| \geq t) \leq 2e^{-\frac{t^2}{2\sum_{i=1}^{n} c_i^2}}, \quad t \geq 0.$$

6. Ustalmy $p \in (0,1)$. Niech $X = \chi(\mathbb{G}_{n,p})$ będzie zmienną losową opisującą liczbę chromatyczną grafu losowego $\mathbb{G}_{n,p}$ i niech zmienna losowa I_k będzie indykatorem zdarzenia, że k-ta krawędź należy do grafu $\mathbb{G}_{n,p}$, $k = 1, 2, ..., \binom{n}{2}$. Dla filtracji
$$\mathcal{A}_0 = \{\emptyset, \Omega\}, \quad \mathcal{A}_1 = \sigma(I_1), \quad \mathcal{A}_k = \sigma\left(I_1, ..., I_{\binom{k}{2}}\right), \quad k = 2, ..., n,$$
definiujemy
$$X_k := \mathbb{E}(X|\mathcal{A}_k), \quad k = 0, 1, 2, ..., n,$$
tzn. ciąg $X_0, X_1, ..., X_n$ jest martyngałem odsłaniającym wierzchołki w grafie losowym $\mathbb{G}_{n,p}$.

   Wykaż, że $|X_k - X_{k-1}| \leq 1$, dla każdego $k = 1, ..., n$. *Wskazówka: wykorzystaj następującą własność funkcji χ: jeśli G jest grafem prostym i G' jest grafem utworzonym z G poprzez dowolną modyfikację zbioru krawędzi* ***ustalonego*** *wierzchołka $v \in V$ (tzn. dodawanie lub usuwanie dowolnych krawędzi incydentnych do v), to $|\chi(G) - \chi(G')| \leq 1$.*