GRAFY I SIECI LOSOWE, WYDZIAŁ MATEMATYKI (12 I 2022)

LISTA 8. SIECI LOSOWE Z DOŁĄCZANIEM PREFERENCYJNYM

1. Sprawdź, że liczby $p_{t+1,e}^{(m,\delta)}(i)$, $i = 1, 2, ..., t+1$, opisujące prawdopodobieństwa dołączania kolejnych krawędzi w sieci losowej z preferencyjnym dołączaniem wierzchołków, które zostały określone na wykładzie, rzeczywiście definiują rozkład prawdopodobieństwa.

2. Uzasadnij, że alternatywna konstrukcja sieci losowej w modelu $(\mathbb{G}_t^{(m,\delta)})_{t\geq 1}$ przy pomocy utożsamiania kolejnych grup m wierzchołków w grafach $\mathbb{G}_{mt}^{(1,\delta/m)}$ jest rzeczywiście poprawna, tzn. prowadzi do takich samych prawdopodobieństw dołączania wierzchołków.

3. Załóżmy, że $m = 1$ i $\delta = -1$. Jak wówczas wygląda topologia sieci losowej z preferencyjnym dołączaniem wierzchołków? A jak wygląda sieć, gdy $m > 1$ i $\delta = -1$?

4. Korzystając z alternatywnej kontrukcji sieci losowej $\mathbb{G}_t^{(m,\delta)}$ (por. zadanie 2 powyżej) i Twierdzenia 9.2 podanego na wykładzie, udowodnij, że dla dowolnego $i = 1, 2, ..., t$ istnieje zmienna losowa Z_i taka, że
$$\frac{D_i(t)}{(mt)^{\frac{1}{2+\delta/m}}} \to Z_i, \quad \text{prawie na pewno, gdy } \ t \to \infty,$$
oraz
$$\frac{\mathbb{E}^{(m,\delta)} D_i(t)}{(t/i)^{\frac{1}{2+\delta/m}}} \to C, \quad \text{gdy } \ t, i \to \infty,$$
dla pewnej dodatniej stałej $C = C(m, \delta)$. Symbol $D_i(t)$ oznacza tu zmienną losową opisującą stopień i-tego wierzchołka w sieci losowej $\mathbb{G}_t^{(m,\delta)}$.

5. Udowodnij, że dla dowolnych liczb $x \geq y \geq 1$, $a > -y$ oraz $b > a + 1$ zachodzi tożsamość
$$\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x+b)} = \frac{1}{b-a-1}\left(\frac{\Gamma(x+a)}{\Gamma(x-1+b)} - \frac{\Gamma(x+1+a)}{\Gamma(x+b)}\right).$$