DOKOŃCZENIE DOWODU TWIERDZENIA 7.4 (CZĘŚĆ (1)):

Jeśli $p = \frac{c}{n}$, dla pewnego $c > 0$, to

$$\Delta(\mathbb{G}_{n,p}) = \frac{\log n}{\log\log n}\left(1 + o(1)\right), \quad n \to \infty,$$

gdzie $\varepsilon(n) = o(1)$, $n \to \infty$, z dużym p-stwem.

Dowód Oznaczmy: $d_{\pm} = \left\lceil \frac{\log n}{\log\log n \pm 2\log\log\log n} \right\rceil = \frac{\log n}{\log\log n}\left(1 + o(1)\right)$, $n \to \infty$.

$$\mathbb{P}\left(\exists_v \deg(v) \geq d_-\right) \leq n\binom{n-1}{d_-}\left(\frac{c}{n}\right)^{d_-} \leq n\left(\frac{ce}{d_-}\right)^{d_-} = e^{\log n - d_-\log d_- + O(d_-)},$$
$n \to \infty$

oraz

$$d_-\log d_- \geq \frac{\log n}{\log\log n}\underbrace{\left(\frac{1}{1 - 2\frac{\log\log\log n}{\log\log n}}\right)}_{:= A}\left(\log\log n - \log\log\log n + o(1)\right)$$

$$A = 1 + 2\cdot\frac{\log\log\log n}{\log\log n} + \frac{4\left(\frac{\log\log\log n}{\log\log n}\right)^2}{1 - 2\frac{\log\log\log n}{\log\log n}}$$

to wynika z równości

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Zatem

$$d_-\log d_- \geq \frac{\log n}{\log\log n}\left(1 + 2\frac{\log\log\log n}{\log\log n} + \frac{4\left(\frac{\log\log\log n}{\log\log n}\right)^2}{1 - 2\frac{\log\log\log n}{\log\log n}}\right)\left(\log\log n - \log\log\log n + o(1)\right)$$

$$= \frac{\log n}{\log\log n}\left(\log\log n + \log\log\log n + o(1)\right), \quad n \to \infty$$

Stąd

$$\mathbb{P}\left(\exists_v \deg(v) \geq d_-\right) \leq e^{-\frac{\log n\,(\log\log\log n + o(1))}{\log\log n} + O(d_-)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

To daje

$$\Delta(\mathbb{G}_{n,p}) < d_- = \frac{\log n}{\log\log n}\left(1 + o(1)\right), \quad n \to \infty, \text{ z dużym p-stwem.}$$

Można także sprawdzić, że $X_{d_+} > 0$ z dużym p-stwem (dokładne uzasadnienie jest treścią zadania z nie liście zadań 6), gdzie $X_{d_+}$ jest zmienną zliczającą wierzchołki stopnia $d_+$ w $\mathbb{G}_{n,p}$. Oznacza to, że w $\mathbb{G}_{n,p}$ istnieje wierzchołek stopnia $d_+$, z dużym p-stwem.

co daje $\Delta(\mathbb{G}_{n,p}) \geq d_+$ z dużym p-stwem.

Ostatecznie mamy zatem

$$\frac{\log n}{\log\log n}\left(1 + o(1)\right) = d_+ \leq \Delta(\mathbb{G}_{n,p}) < d_- = \frac{\log n}{\log\log n}\left(1 + o(1)\right), \quad n \to \infty$$

z dużym p-stwem. To już daje nasz wynik. ∎