ALGEBRA z GEOMETRIĄ ANALITYCZNĄ

wersja na ćwiczenia odbywające się co tydzień

PRZEKSZTAŁCANIE WYRAŻEŃ ALGEBRAICZNYCH, WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA

1. Uprościć podane wyrażenia

(a) $2\sqrt{3}-\sqrt{27}$; (b) $(3\sqrt{2}-\sqrt{6})(\sqrt{3}+3)$; (c) $3a^{\frac{5}{6}}\cdot 8a^{\frac{2}{3}}$; (d) $(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)$;

(e) $\left(\dfrac{45x^{-4}y^2}{9z^{-8}}\right)^{-3}$; (f) $\dfrac{y^3-1}{y^2-1}:\dfrac{y^2+y+1}{y^2+2y+1}$; (g) $\dfrac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}}$; (h) $\dfrac{6x^4-6y^4}{x-y}$.

2. Obliczyć

(a) $32:2^3-12:4\cdot 3$; (b) $32:(2^3-12:4)\cdot 3$; (c) $\left(2\frac{10}{27}\right)^{1/3}$; (d) $\sqrt[5]{-32}$.

3. Usunąć niewymierności z mianownika

(a) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$; (b) $\dfrac{3}{\sqrt{7}-2}$; (c) $\dfrac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}}$; (d) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$.

4. Napisać rozwinięcia potęg podanych dwumianów

(a) $(y+z)^2$; (b) $(3x-4)^3$; (c) $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^4$; (d) $\left(p+\frac{2}{p^3}\right)^5$.

5. Wyznaczyć współczynnik rozwinięcia występujący przy t

(a) $(b+4)^5,\quad t=b^3$; (b) $(2p-3q)^7,\quad t=p^2q^5$; (c) $\left(2x-\frac{1}{x}\right)^6\left(\frac{1}{2x}+x\right)^6,\quad t=x^0$.

6. Wykorzystując rozwinięcie dwumianu $(1+x)^4$ obliczyć $1,01^4$.

7. W rozwinięciu dwumianu $(1-3x)^n$ współczynnik przy x^2 równy jest 90. Znaleźć n.

DZIAŁANIA NA MACIERZACH

8. Niech

$$A=\begin{bmatrix}1&4&-3\\6&3&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}3&2&1\\-2&-3&5\\1&0&0\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2&4\\4&0\\-2&2\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}3\\4\\0\\2\end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix}-7&3&1&1\end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć, jeśli jest to możliwe, następujące macierze

$$A+C,\ \frac{1}{2}A^T+\frac{1}{2}C,\ C-2A^T,\ AB,\ BA,\ BC+BA^T,\ B^2,\ D^TF,\ DF,\ F\cdot 5D,\ CC^T-(CC^T)^T.$$

9.

(a) Obliczyć $AB-BA$, jeśli

$$A=\begin{bmatrix}1&3\\-1&2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}4&0\\5&1\end{bmatrix}.$$

(b) Podać przykład dwóch macierzy $A \neq B$, stopnia 2 różnych od macierzy skalarnych i takich, że $AB = BA$.

10. Macierz (rzeczywistą) A nazywa się ortogonalną, jeśli spełnia warunek $AA^T = I$ $(= A^T A)$, symetryczną jeśli $A = A^T$, antysymetryczną jeśli $A = -A^T$. Niech $\varphi \in \mathbb{R}$ i

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

(a) Pokazać, że A jest macierzą ortogonalną.

(b) Znaleźć wszystkie wartości φ, dla których A jest symetryczna.

(c) Znaleźć wszystkie wartości φ, dla których A jest antysymetryczna.

11. Prawda czy fałsz? Niech X będzie macierzą stopnia 2. Uzasadnić prawdziwość albo podać kontrprzykłady obalający poniższe stwierdzenia.

(a) Jeśli $X^2 = 0$, to $X = 0$.

(b) Jeśli $X^2 = X$, to albo $X = 0$, albo $X = I$.

(c) Jeśli $X^2 = I$, to albo $X = I$, albo $X = -I$.

A co w przypadku gdy X jest macierzą stopnia 3 ?

12. Określić wymiar i wyznaczyć rzeczywistą macierz X spełniającą równanie macierzowe

(a) $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 \end{bmatrix}$; **(b)** $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}$; **(c)** $2X + X^T = X + I$;

(d) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} X^T = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$; **(e)** $(XA)^T = (A^T + 3I)X^T$, gdzie A jest macierzą 3×3.

13. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć iloczyn AB a następnie rozwiązać równanie $XA = C$ z niewiadomą X.

WYZNACZNIKI, MACIERZE ODWROTNE, RZĘDY MACIERZY

14. Wiadomo, że

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 6.$$

Znaleźć wartości wyznaczników

(a) $\begin{vmatrix} g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$; **(b)** $\begin{vmatrix} g & d & a \\ h & e & b \\ i & f & c \end{vmatrix}$; **(c)** $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$; **(d)** $\begin{vmatrix} -3a & b & c-4b \\ -3d & e & f-4e \\ -3g & h & i-4h \end{vmatrix}$.

15. Niech A będzie rzeczywistą macierzą stopnia 7, której wyznacznik wynosi 2. Ile wynosi wyznacznik macierzy $2A$, $-5A$, A^2, $-A^3$, $(A^T)^2$?

16. Napisać rozwinięcie Laplace'a względem podanych wierszy/kolumn (nie obliczać podanych wyznaczników)

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \\ -7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, 1. kolumna; **(b)** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ \pi & 6 & -3 \end{vmatrix}$, 2. wiersz; **(c)** $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \\ 1 & 24 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$, 3. kolumna.

17. Obliczyć wyznaczniki podanych macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -13 & -8 & -4 \\ 12 & 7 & 4 \\ 24 & 16 & 7 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -13-\lambda & -8 & -4 \\ 12 & 7-\lambda & 4 \\ 24 & 16 & 7-\lambda \end{bmatrix};$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}; \quad E = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

18. Obliczyć wyznaczniki podanych macierzy, gdzie a, b, c, d, e są liczbami rzeczywistymi

$$\begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 \\ b & b & 1 & 1 \\ b & b & b & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} c & c & c & c & c \\ 1 & c & c & c & c \\ 1 & 1 & c & c & c \\ 1 & 1 & 1 & c & c \\ 1 & 1 & 1 & 1 & c \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1+a & b & c & d & e \\ a & 1+b & c & d & e \\ a & b & 1+c & d & e \\ a & b & c & 1+d & e \\ a & b & c & d & 1+e \end{bmatrix}.$$

19. Dla jakich wartości parametrów rzeczywistych c, h, k, λ poniższe macierze są odwracalne

(c) $\begin{bmatrix} c & 1 \\ c & -1 \end{bmatrix}$; **(h)** $\begin{bmatrix} h & 1 & 1 \\ 1 & h & -1 \\ 1 & 1 & h \end{bmatrix}$; **(k)** $\begin{bmatrix} 3 & -1 & k \\ 5 & -2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$; **(l)** $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$?

20. Wykorzystując metodę obliczania dopełnień algebraicznych wyznaczyć macierze odwrotne, jeśli istnieją, do podanych macierzy

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

21. Wykorzystując metodę bezwyznacznikową (przekształceń elementarnych na wierszach) wyznaczyć macierze odwrotne, jeśli istnieją, do podanych macierzy

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

22. Znaleźć rozwiązania podanych równań macierzowych

(a) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$;

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$;

(c) $(X^T + 5I)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$;

(d) $X = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$;

(e) $\left(2X \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$;

(f) $3 \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left(I - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\right)^{-1} X = I.$

23. Niech A i B będą rzeczywistymi, odwracalnymi macierzami wymiaru $n \times n$, gdzie n jest nieparzystą liczbą naturalną. Pokazać, że $AB + BA$ jest macierzą niezerową.

24. Niech A, B będą macierzami wymiaru $n \times n$. Pokazać, że jeśli $A + B$ jest macierzą odwracalną, to $A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A$.

25. Dla niezerowych liczb rzeczywistych zachodzi $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b-a}{ab}$. Uzasadnić macierzowy analogon tej równości dla odwracalnych macierzy A, B:

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}.$$

Czy równość $A^{-1} - B^{-1} = B^{-1}(B - A)A^{-1}$ także jest prawdziwa?

26. Wyznaczyć rzędy macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & -1 & 27 \\ 1 & -8 & 16 & 10 \\ 2 & 1 & 15 & 37 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 & 6 & 6 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 6 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

27. Wyznaczyć rzędy macierzy w zależności od rzeczywistych parametrów a, b, r, s

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & a \\ a & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 3 & b & b & b \\ 2 & 2 & b & b \\ 2 & 2 & 2 & b \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r-2 & 2 \\ 0 & s-1 & r+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

28. Prawda czy fałsz? Jeśli A, B są takimi macierzami, że $\operatorname{rz} A = \operatorname{rz} B$, to $\operatorname{rz} A^2 = \operatorname{rz} B^2$. Uzasadnić równość albo podać kontrprzykład obalający powyższe stwierdzenie.

UKŁADY RÓWNAŃ LINIOWYCH

29. Sprawdzić czy podane układy równań mają rozwiązanie (nie rozwiązując ich). Jeśli odpowiedź jest twierdząca podać liczbę parametrów.

(a) $\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 - 4x_3 - 9x_4 + 3x_5 = -1 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 5x_5 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$;

(b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 2 \end{cases}$;

(c) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 0 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$; (d) $\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 = 10 \end{cases}$.

30. Korzystając ze wzorów Cramera, jeśli to możliwe, wyznaczyć wskazane niewiadome z układów równań liniowych

(a) $\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 5x + 7y = 6 \end{cases}$, $\boldsymbol{x, y}$; (b) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x - y - z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases}$, $\boldsymbol{y}$; (c) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y = \alpha \\ y + z = \beta \end{cases}$, $\boldsymbol{z}$;

(d) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 5 \\ 6x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 14 \\ x_1 - x_2 + 4x_4 = 9 \\ x_2 - 3x_3 - 4x_4 = -4 \end{cases}$, $\boldsymbol{x_4}$; (e) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ 5x_2 + 6x_3 + 7x_4 = 1 \\ 9x_3 + 10x_4 = 0 \\ 12x_4 = 1 \end{cases}$, $\boldsymbol{x_1, x_2}$.

31. Rozwiązać podane układy równań liniowych wykorzystując metodę eliminacji Gaussa

(a) $\begin{cases} x - z = 0 \\ 3x + y = 1 \\ -x + y + z = 4 \end{cases}$; (b) $\begin{cases} x + y + 2z + w = 5 \\ 2x + 3y - z - 2w = 2 \\ 4x + 5y + 3z = 7 \\ 5x + 7y - 3w = 4 \end{cases}$; (c) $\begin{cases} x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$;

(d) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 + 20x_4 = 13 \\ -6x_1 - 9x_2 + 7x_3 - 8x_4 = -3 \end{cases}$; (e) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 4 \\ -6x_1 - 8x_2 + 6x_3 - 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 4x_2 - 4x_3 - x_4 = -7 \end{cases}$.

32. Znaleźć rozwiązanie poniższego układu równań obliczając macierz odwrotną do macierzy głównej a następnie wykorzystując mnożenie macierzy

$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + x_3 = 17 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = -14 \\ 3x_1 - 5x_2 + x_3 = 23 \end{cases}.$$

Podać dwa inne sposoby rozwiązania tego układu.

33. Dane są cztery liczby naturalne. Wybieramy trzy z nich, liczymy ich średnią arytmetyczną, do wyniku dodajemy czwartą liczbę i otrzymujemy 29. Po powtórzeniach powyższych operacji (przy innych możliwych wyborach trójki liczb) uzyskujemy 23, 21 i 17. Znaleźć wyjściowe liczby.

34. Równanie okręgu ma postać $x^2 + y^2 + ax + by = c$ (dla pewnych liczb rzeczywistych a, b, c). Znaleźć równanie okręgu przechodzącego przez punkty $(6, 8), (8, 4)$ i $(3, 9)$.

35. Niech $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{R}^3$. Mówimy, że wektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ jest liniową kombinacją wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ jeśli istnieją skalary $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ takie, że $\vec{v} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$. Przykładowo, wektor $(-2, 8, 5)$ jest kombinacją liniową wektorów $(3, 1, -2)$, $(1, 0, 3)$ i $(4, -2, 1)$ ponieważ $2(3, 1, -2) + 4(1, 0, 3) - 3(4, -2, 1) = (-2, 8, 5)$.

Przedstawić wektor $\vec{v} = (1, 2, 3)$ jako liniową kombinację wektorów $\vec{v}_1 = (3, 2, 4)$, $\vec{v}_2 = (1, 0, 3)$, $\vec{v}_3 = (2, 2, 2)$.

36. Prawda czy fałsz? Układ równań liniowych, w którym jest więcej niewiadomych niż równań ma co najmniej jedno rozwiązanie. (Tak jak zwykle, jeśli to prawda należy uzasadnić stwierdzenie, a jeśli fałsz - podać kontrprzykład.)

37. Dla jakich wartości parametru λ układ równań

$$\begin{cases} 3x + 2y = \lambda x \\ 4x + 5y = \lambda y \end{cases}$$

ma rozwiązanie inne niż $x = y = 0$?

38. Wyznaczyć te wartości parametru $b \in \mathbb{R}$, dla których macierz $\left[\begin{array}{cc|c} -1 & b & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{array}\right]$ jest macierzą rozszerzoną niesprzecznego układu równań liniowych.

39. Przedyskutować ilość rozwiązań układu równań w zależności od parametru $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} (4-a)x + 2y - z = 1 \\ -2x + (1-a)y + 2z = 2 \\ -x + 2y + (4-a)z = 1 \end{cases}.$$

40. Wykorzystać metodę eliminacji Gaussa do rozwiązania układu równań, którego macierz rozszerzona ma postać

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & -8 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right].$$

Gdzie jest błąd w poniższej metodzie 'rozwiązania'?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & -1 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 6 & -8 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{w_1 \leftrightarrow w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & -6 & -1 & 1 & 5 \\ 6 & -8 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[w_3 \mapsto w_3 - 2w_2]{w_2 \mapsto 2w_2 - w_3} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & -1 & -4 & -9 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[w_3 \mapsto w_3 + w_2]{w_1 \mapsto w_1 + \frac{1}{2} w_2} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & \frac{5}{2} & 5 & \frac{15}{2} \\ 0 & -4 & 1 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[w_2 \mapsto -\frac{1}{4} w_2]{w_1 \mapsto -1 \cdot w_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{5}{2} & -5 & -\frac{15}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -1 & -\frac{9}{4} \end{array}\right].$$

Stąd $x_1 = -\frac{15}{2} + \frac{5}{2} x_3 + 5x_4$, $x_2 = -\frac{9}{4} + \frac{1}{4} x_3 + x_4$, $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$.

LICZBY ZESPOLONE

41. Obliczyć

(a) $(-7 + 12\mathrm{i}) - (3 - 6\mathrm{i}) + (1 + 2\mathrm{i})$;

(b) $(1 + 2\mathrm{i})(-2 + 3\mathrm{i})(1 - \mathrm{i})$;

(c) $(1 + \mathrm{i})\overline{(1 + \mathrm{i})}$;

(d) $(1 - 3\mathrm{i})^3$;

(e) $\mathrm{i}^{109} + \mathrm{i}^{-5} + (-\mathrm{i})^{13} + (-\mathrm{i})^{-7}$;

(f) $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}^2 \cdot \mathrm{i}^3 \cdots \mathrm{i}^{2018}$;

(g) $\left(\frac{1 + \mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}}\right)^{16} + \left(\frac{1 - \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}}\right)^{8}$;

(h) $\frac{5 + 5\mathrm{i}}{3 - 4\mathrm{i}} + \overline{\left(\frac{20}{4 - 3\mathrm{i}}\right)}$;

(i) $\begin{bmatrix} \alpha\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\beta\mathrm{i} \end{bmatrix}^2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;

(j) $\begin{bmatrix} \alpha\mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\beta\mathrm{i} \end{bmatrix}^{-1}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

42. Znaleźć rozwiązania poniższych równań

(a) $4+5\mathrm{i} = z-(1-\mathrm{i})$; **(b)** $|z|+z = 3+4\mathrm{i}$; **(c)** $z^2 = -\mathrm{i}$; **(d)** $(3+\mathrm{i})\bar{z} = 2\mathrm{i}z$;

(e) $4z^2+8|z|^2 = 8$; **(f)** $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{2-\mathrm{i}} = \dfrac{3}{1+\mathrm{i}}$; **(g)** $z^2 = \bar{z}$; **(h)** $\dfrac{1+z^2}{1-z^2} = \mathrm{i}$.

43. Niech $z_1 = 1+\mathrm{i}$, $z_2 = -1-\mathrm{i}$. Wyznaczyć $z_3 \in \mathbb{C}$ aby trójkąt o wierzchołkach w z_1, z_2, z_3 był równoboczny.

44. Korzystając m.in. z interpretacji geometrycznej modułu liczby zespolonej opisać i zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej następujące zbiory spełniające poniższe warunki

(a) $|z-2| = 3$; **(b)** $|z+\mathrm{i}| < 2$; **(c)** $|z-1+2\mathrm{i}| \geqslant 3$; **(d)** $|z+2| = |z-5+\mathrm{i}|$;

(e) $|2\mathrm{i}z+4| \leqslant 8$; **(f)** $0 < \mathrm{Re}(\mathrm{i}z) \leqslant 1$; **(g)** $-1 < \mathrm{Im}(z+5) < 1$; **(h)** $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-2}{z-1}\right) = 0$.

45. Przedstawić w postaci trygonometrycznej/wykładniczej liczby zespolone

(a) $-4\mathrm{i}$; **(b)** $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$; **(c)** $\sin a+\mathrm{i}\cos a, \quad a \in \mathbb{R}$; **(d)** $\dfrac{\mathrm{i}}{(1-\mathrm{i})^3}$.

46. Korzystając ze wzoru de Moivre'a obliczyć

(a) $(2\sqrt{3}-2\mathrm{i})^{44}$; **(b)** $(1+\mathrm{i})^{21}+(1-\mathrm{i})^{21}$; **(c)** $(1-\mathrm{i})^{-18}$; **(d)** $\dfrac{(1-\mathrm{i})^{10}(\sqrt{3}+\mathrm{i})^5}{(-1-\mathrm{i}\sqrt{3})^{10}}$.

Wynik podać w postaci algebraicznej.

47. Znaleźć liczbę zespoloną z wiedząc, że $|z-1| = 1$ i $\arg(z-\mathrm{i}) = 0$.

48. Przedstawić na płaszczyźnie zespolonej zbiory spełniające poniższe warunki na argument główny

(a) $\arg(-1+\mathrm{i}) < \arg z < \arg(1-\mathrm{i})$; **(b)** $\dfrac{\pi}{4} \leqslant \arg(z^3) < \pi$; **(c)** $\arg(3\pi) < |z+2| \leqslant \dfrac{\sqrt{8}}{\pi}\cdot\arg(\mathrm{i})$;

(d) $\dfrac{3\pi}{2} \leqslant \arg(-\mathrm{i}z) < 2\pi$; **(e)** $\arg(z-3+2\mathrm{i}) = \dfrac{\pi}{6}$; **(f)** $\arg(z^4) = \dfrac{2\pi}{3} \ \wedge \ |z-2| < 2$.

49. Znaleźć i zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej pierwiastki

(a) $\sqrt[3]{-27}$; **(b)** $\sqrt[5]{32\mathrm{i}}$; **(c)** $\sqrt[4]{\sqrt{3}+\mathrm{i}}$; **(d)** $\sqrt{\mathrm{i}}$;

(e) $\sqrt[6]{1+\mathrm{i}}$; **(f)** $\sqrt[3]{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right)^9}$; **(g)** $\sqrt[4]{(1-\mathrm{i})^4}$; **(h)** $\sqrt[3]{(2-2\mathrm{i})^6}$.

50. Korzystając z liczb zespolonych uzasadnić równości

(a) $\sin(5x) = 16\sin^5 x-20\sin^3 x+5\sin x$; **(b)** $\cos(5x) = 16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x$.

51. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania

(a) $z^2+4z+13 = 0$; **(b)** $z^2-(3+\mathrm{i})z+4+3\mathrm{i} = 0$; **(c)** $z^3-8\mathrm{i} = 0$; **(d)** $z^3+3z^2+3z+1 = \mathrm{i}$;

(e) $\mathrm{i}z^2+(1+2\mathrm{i})z+1 = 0$; **(f)** $z^4-2z^2+4 = 0$; **(g)** $e^z = 1$; **(h)** $z^6-(1+\mathrm{i})z^3+\mathrm{i} = 0$.

52. Wykazać, że jeśli liczba zespolona z_0 spełnia równanie $z^3 - z + 13 = 0$, to liczba sprzężona $\overline{z_0}$ również spełnia to równanie.

53. Prawda czy fałsz? Jeśli to prawda należy uzasadnić stwierdzenie, a jeśli fałsz - podać kontrprzykład.

(a) Moduł liczby zespolonej równy jest iloczynowi tej liczby i jej sprzężenia.

(b) Liczba zespolona równa się swojemu sprzężeniu wtedy i tylko wtedy, gdy jest zerem.

(c) Sprzężenie sumy dwóch liczb zespolonych równe jest sumie sprzężeń tych liczb.

(d) Dla $z \in \mathbb{C}$ zachodzi równość $\sqrt[ns]{z^s} = \sqrt[n]{z}$, gdzie $\mathbb{N} \ni n, s > 1$.

(e) Część rzeczywista iloczynu dwóch liczb zespolonych równa jest iloczynowi części rzeczywistych tych liczb.

WIELOMIANY

54. Wypisać wszystkie możliwe pierwiastki całkowite/wymierne wielomianów

(a) $6x^4 + 35x^3 - 233x + 36$; **(b)** $x^5 - \frac{9}{2}x^4 + 6x^3 - \frac{7}{2}x^2 - x - 1$; **(c)** $x^8 - 6x^3 + 13x + 120$.

55. Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne wielomianów

(a) $-x^4 + x^3 + x^2 + x + 2$; **(b)** $3x^5 + 2x^4 - 7x^3 + 2x^2$; **(c)** $x^4 - 3{,}3x^3 + 2{,}3x^2 + 0{,}6x$;

(d) $x^5 - \frac{11}{6} + 5x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 4x - \frac{2}{3}$; **(e)** $x^5 + x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 9x + 9$.

56. Znaleźć wszystkie (rzeczywiste i zespolone) pierwiastki wielomianów

(a) $x^4 - x^2 - 2$; **(b)** $x^5 + x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 9x + 9$;

(c) $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 3x + 4$; **(d)** $x^3 - 6x^2 + 13x - 10$.

57. Sprawdzić, że x_1 jest pierwiastkiem wielomianu P a następnie znaleźć pozostałe pierwiastki

(a) $x_1 = \mathrm{i}$, $P(x) = x^4 - 4x^3 + 14x^2 - 4x + 13$;

(b) $x_1 = 1 - \mathrm{i}$, $P(x) = x^3 - (1-\mathrm{i})x^2 + x + (-1+\mathrm{i})$;

(c) $x_1 = -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i}$, $P(x) = x^4 - 4x^2 - 16x - 16$.

58. Znaleźć rozkład wielomianu W na czynniki rzeczywiste nierozkładalne

(a) $W(x) = x^4 + 1$; **(b)** $W(x) = 2x^3 - 3x^2 - 29x - 30$; **(c)** $W(x) = x^3 - 6x - 9$.

59. Zaproponować rozkład na sumę rzeczywistych ułamków prostych (bez wyznaczania stałych w liczniku)

(a) $\dfrac{x-1}{x^2(x^2+9)^3}$; **(b)** $\dfrac{2}{(x^2+1)^4(x^2+4x+2)}$; **(c)** $\dfrac{4x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 8x^2 - 2x - 3}{(x^2-2x-1)(x^2+2x+1)^2}$.

60. Podane funkcje wymierne rozłożyć na sumę rzeczywistych ułamków prostych

(a) $\dfrac{2x^2+7x+7}{x(x+1)(x+3)}$; **(b)** $\dfrac{8x^2-x+3}{x^3+x}$; **(c)** $\dfrac{6x^2+3x-9}{x^2(x+3)}$; **(d)** $\dfrac{-x^2+x+1}{x(x+1)^2}$;

(e) $\dfrac{2x+4}{4x^2+12x+9}$; (f) $\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$; (g) $\dfrac{3x-7}{x-3}$; (h) $\dfrac{8x^2-4x+8}{x^4+4}$.

61. Wielomian $2x^3+ax^2+bx+1$ dzielony przez $x-1$ daje resztę 4, a przez $x-2$ - resztę 15. Znaleźć resztę z dzielenia tego wielomianu przez $x+1$.

62. Dla jakich wartości $a, b \in \mathbb{R}$ wielomian $W(x) = ax^3 + bx^2 + 11x - 6$ dzieli się bez reszty przez $x^2 - 4x + 3$?

63. Nie wykonując dzielenia, znaleźć resztę z dzielenia wielomianu P przez Q

(a) $P(x) = (x+3)^{28} + (x+2)^{10} + (5x+9)^{2017}$, $\quad Q(x) = x+2$;

(b) $P(x) = x^{100}$, $\quad Q(x) = (x-1)(x-2)$;

(c) $P(x) = x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x$, $\quad Q(x) = x^3 - x$.

WEKTORY I WARTOŚCI WŁASNE MACIERZY

64. Niech

$$A = \begin{bmatrix} -9 & -6 & -2 & -4 \\ -8 & -6 & -3 & -1 \\ 20 & 15 & 8 & 5 \\ 32 & 21 & 7 & 12 \end{bmatrix}.$$

Korzystając z definicji wektora i wartości własnej macierzy określić bez wyliczania pierwiastków równania charakterystycznego, które z podanych wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ są wektorami własnymi macierzy A. Dla tych, które są znaleźć odpowiadające im wartości własne;

$\vec{u} = (-1, 1, 0, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 1, 0)$, $\vec{w} = (-1, 0, 2, 2)$, $\vec{z} = (0, 1, -3, 0)$.

65. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczyć wartości i wektory własne macierzy A rozważając ją jako macierz (a) zespoloną, (b) rzeczywistą.

66. Wykorzystując fakt, że iloczyn macierzy górnotrójkątnych jest macierzą górnotrójkątną, znaleźć wartości własne macierzy A^8, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

67. Znaleźć rzeczywistą macierz stopnia 2, której wartości własne to $\lambda_1 = 1$ odpowiadająca wektorowi własnemu $\vec{v}_1 = (1, 2)$ i $\lambda_2 = -1$ związana z wektorem własnym $\vec{v}_2 = (2, 1)$.

68. Znaleźć wszystkie rzeczywiste macierze stopnia 2, dla których wektor $(1, 2)$ jest wektorem własnym odpowiadającym wartości własnej 2.

69. Niech $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Znaleźć odwracalną macierz P taką, że $D = P^{-1}AP$ jest macierzą diagonalną.

(b) Obliczyć A^{50}.

70. Zdiagonalizować macierz A (znaleźć macierz A' podobną do A, która ma postać diagonalną)

(a) $A = \begin{bmatrix} 11 & 14 \\ -7 & -10 \end{bmatrix}$; **(b)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; **(c)** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Podać macierz P określającą to podobieństwo.

71. Prawda czy fałsz? Wiadomo, że macierz A jest podobna do macierzy $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Uzasadnić albo podać kontrprzykład obalający poniższe stwierdzenia:

(a) $A^2 = A$; **(b)** $\det A = 0$;

(c) $\lambda = 0$ jest wartością własną macierzy A; **(d)** $\lambda = 1$ jest wartością własną macierzy A^2.

GEOMETRIA ANALITYCZNA

72. Dla wektorów $\vec{u} = (2,1,1)$, $\vec{v} = (1,-2,2)$, $\vec{w} = (1,3,-5)$ obliczyć podane wyrażenia, jeśli mają one sens

(a) $|\vec{v}|$; **(b)** $\vec{u} \circ \vec{w}$; **(c)** $(2\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w}$; **(d)** $|\vec{u} - \vec{v}| \times \vec{w}$; **(e)** $|\vec{w}| - \vec{v} \circ \vec{w}$;

(f) $|\vec{u}|\vec{v} - \vec{w}$; **(g)** $\vec{u} \times \vec{w} - \vec{v}$; **(h)** $\vec{u} \circ (\vec{w} - \vec{v})$; **(i)** $(\vec{u} \times \vec{v}) \circ \vec{w}$; **(j)** $(\vec{u} \circ \vec{v}) \times \vec{w}$.

73. Wiadomo, że punkty $A = (-1,-2,4)$, $B = (-4,-2,0)$ i $C = (3,-2,1)$ są wierzchołkami trójkąta. Wyznaczyć kąt przy wierzchołku B.

74. Niech $\vec{u}, \vec{v}$ będą wektorami przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

(a) Wiadomo, że $|\vec{u}| = 13$, $|\vec{v}| = 19$ i $|\vec{u} + \vec{v}| = 24$. Obliczyć długość wektora $\vec{u} - \vec{v}$.

(b) Wiadomo, że $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tworzą kąt $\varphi = 60°$; Ponadto $|\vec{u}| = 5$ i $|\vec{v}| = 8$. Obliczyć długość wektora $\vec{u} - \vec{v}$.

(c) Wiadomo, że $|\vec{u}| = 3, |\vec{v}| = 5$ znaleźć wartość $\alpha \in \mathbb{R}$, aby wektory $\vec{u} + \alpha\vec{v}$ i $\vec{u} - \alpha\vec{v}$ były prostopadłe.

75. Bez wyznaczania równania prostej, sprawdzić czy punkty $P = (2,-1,4)$, $Q = (5,4,6)$ i $R = (-4,-11,0)$ leżą na jednej prostej.

76. Znaleźć wektor $\vec{u}$ współliniowy z wektorem $\vec{v} = (2,1,-1)$ i spełniający warunek $\vec{v} \circ \vec{u} = 3$.

77. Znaleźć wszystkie wektory jednostkowe, które są prostopadłe jednocześnie do wektorów $\vec{u} = (2,-1,1)$ i $\vec{v} = (4,1,-2)$.

78. Obliczyć

(a) pole powierzchni trójkąta o wierzchołkach w punktach $A = (1,2,0)$, $B = (3,0,-3)$ i $C = (5,2,6)$;

(b) objętość czworościanu o wierzchołkach w punktach $A = (2,-1,1)$, $B = (5,5,4)$, $C = (3,2,-1)$ i $D = (4,1,3)$;

(c) pole powierzchni równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u} = (3,-4,1)$, $\vec{v} = (-3,6,0)$;

(d) pole powierzchni równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u} = (3,-5,1)$, $\vec{v} = (0,2,-2)$, $\vec{w} = (3,1,1)$.

79. Dane są wierzchołki czworościanu: $A = (0,0,2)$, $B = (3,0,5)$, $C = (1,1,0)$, $D = (4,1,2)$. Obliczyć długość wysokości opuszczonej z wierzchołka D.

80. Napisać równania ogólne i parametryczne płaszczyzny przechodzącej przez

(a) punkty $A = (0,3,1)$, $B = (1,0,-1)$ i $C = (2,-2,-2)$;

(b) punkt $P = (2,1,-1)$, której wektor normalny to $\vec{n} = (1,-2,3)$;

(c) punkt $(3,4,-5)$ i równoległej do dwóch wektorów $\vec{a} = (3,1,-1)$ i $\vec{b} = (1,-2,1)$;

(d) punkt $(1,-2,4)$ i równoległej do płaszczyzny Oxz;

(e) punkt $(4,-1,2)$ i przez oś Ox;

(f) punkty $P_1 = (2,-1,1)$, $P_2 = (3,1,2)$ i równoległej do osi Oy;

(g) środek odcinka AB, gdzie $A = (3,1,7)$ a $B = (1,-3,3)$ i prostopadłej do tego odcinka.

81. Napisać równania parametryczne i kierunkowe prostej przechodzącej przez

(a) dwa punkty $(1,1,-2)$ i $(3,-1,0)$;

(b) punkt $P = (2,1,-1)$, której wektor kierunkowy to $\vec{n} = (1,-2,3)$;

(c) punkt $M_1 = (2,0,-3)$ i równoległej do wektora $\vec{a} = (2,-3,5)$;

(d) punkt $M_1 = (2,0,-3)$ i równoległej do osi Oy;

(e) punkt $M_1 = (2,3,-5)$ i równoległej do prostej

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 7 = 0 \\ x + 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases};$$

(f) przez punkt $P = (2,3,0)$ i prostopadłej do prostych

$$k\colon \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -3 + 4t \\ z = 4 + 5t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}, \quad \text{i} \quad l\colon x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{3};$$

(g) punkt $P = (-1,2,-3)$, prostopadłej do wektora $\vec{a} = (6,-2,-3)$ i przecinającej prostą $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-5}$.

82. Zaleźć punkty przecięcia

(a) dwóch prostych $k\colon \begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 3t - 2 \\ z = -4t + 6 \end{cases},\ t \in \mathbb{R},\quad l\colon \begin{cases} x = s + 5 \\ y = -4s - 1 \\ z = s - 4 \end{cases},\ s \in \mathbb{R};$

(b) prostej $k\colon \dfrac{1-x}{2} = \dfrac{y+3}{2} = z - 3$ z płaszczyzną $\pi\colon 2x - y + 3z - 1 = 0$.

83. Wyznaczyć równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez punkt $M = (2,-2,1)$ i prostą

$$\{(x,y,z) = (1,2,-3) + t(2,-3,2)\colon t \in \mathbb{R}\}.$$

84. Wyznaczyć równanie ogólne płaszczyzny przechodzącej przez proste

(a) $k\colon \begin{cases} x - 2y + 3z = 5 \\ x - 2y - 4z = -3 \end{cases}$ i $l\colon \begin{cases} 3x + y + 3z + 7 = 0 \\ 5x - 3y + 2z + 5 = 0 \end{cases}$;

(b) $k\colon \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z-3}{-2}$ i $l\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+3}{-2}$.

85. O wektorze $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ wiadomo, że (1) jego początkiem jest początek układu współrzędnych, (2) koniec leży na płaszczyźnie $x - y + z + 1 = 0$, (3) jest prostopadły do wektora $\vec{w} = (1, 0, 0)$ i (4) czworościan zbudowany na wektorach $\vec{u}, \vec{w}$ i $(-2, 0, 1)$ ma objętość 3. Znaleźć współrzędne tego wektora.

86. Wyznaczyć odległość

(a) punktu $P = (1, -1, -2)$ od prostej $l\colon \dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-8}{-2}$;

(b) punktu $M = (-1, 1, -2)$ od płaszczyzny przechodzącej przez punkty $M_1 = (1, -1, 1)$, $M_2 = (-2, 1, 3)$, $M_3 = (4, -5, -2)$;

(c) między prostymi równoległymi $k\colon \begin{cases} 2x + 2y - z - 10 = 0 \\ x - y - z - 22 = 0 \end{cases}$ i $l\colon \dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-9}{4}$;

(d) między prostymi nierównoległymi $k\colon \dfrac{x+7}{3} = \dfrac{y+4}{4} = \dfrac{z+3}{-2}$ i $l\colon \dfrac{x-21}{6} = \dfrac{y+5}{-4} = \dfrac{z-2}{-1}$;

(e) między płaszczyznami $\pi_1\colon 2x - y + 2z + 9 = 0$ i $\pi_2\colon 4x - 2y + 4z - 21 = 0$.

87. Znaleźć równanie płaszczyzny π równoległej do płaszczyzny $\pi_1\colon 2x - y + 2z + 4 = 0$ wiedząc, że punkt $P = ((3, 2, -1))$ jest położony w tej samej odległości od obu płaszczyzn.

88. Wyznaczyć kąt między prostymi

(a) $x - 3 = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{\sqrt{2}}$ i $x + 2 = y - 3 = \dfrac{z+5}{\sqrt{2}}$;

(b) $\{x = 3t - 2,\ y = 0,\ z = -t + 3,\ t \in \mathbb{R}\}$ i $\{x = 2s - 1,\ y = 0,\ z = s - 3,\ s \in \mathbb{R}\}$;

(c) $\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{cases}$ i $\begin{cases} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

89. Wyznaczyć kąt między płaszczyznami

(a) $x - \sqrt{2}y + z - 1 = 0$ i $x + \sqrt{2}y - z + 3 = 0$;

(b) $x + 2y - z = 3$ i $x - 3y - z = 5$;

(c) $6x + 3y - 2z = 0$ i $x + 2y + 6z - 12 = 0$;

(d) $x - 3z + 2 = 0$ i $2x - 6z - 7 = 0$.

90. Wyznaczyć wartości parametrów $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}$, dla których

(a) prosta $\begin{cases} 3x - 2y + z + 3 = 0 \\ 4x - 3y + 4z + 1 = 0 \end{cases}$ jest równoległa do płaszczyzny $2x - y + \boldsymbol{a}z - 2 = 0$;

(b) płaszczyzna $3x - 2y + \boldsymbol{b}z + 1 = 0$ jest prostopadła do prostej $\dfrac{x-2}{\boldsymbol{c}} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-5}{-3}$.

91. Wyznaczyć wartości a i b, dla których płaszczyzny

$$2x - y + 3z - 1 = 0, \quad x + 2y - z + b = 0, \quad x + ay - 6z + 10 = 0$$

(a) mają punkt wspólny;

(b) przechodzą przez jedną prostą;

(c) przecinają się w trzech różnych prostych.

92. Wyznaczyć rzut prostokątny prostej k na płaszczyznę π, gdzie

(a) $k\colon (x,y,z)=(1,0,0)+r(2,-1,1)$, $\quad \pi\colon (x,y,z)=(1,1,1)+s(1,1,0)+t(2,1,-1)$, $r,s,t\in\mathbb{R}$;

(b) $k\colon \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{2}=3-z$, $\quad \pi\colon 3x+2y-z+2=0$;

(c) $k\colon \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-1}{4}$, $\quad \pi\colon x-y+3z-5$;

(d) $k\colon \begin{cases} 5x-3y+2z-5=0\\ 2x-y-z-1=0 \end{cases}$, $\qquad \pi\colon 4x-3y+7z-7=0$.

93. Wyznaczyć rzut

(a) punktu $P=(2,-1,3)$ na prostą $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+7}{5}=\dfrac{z-2}{2}$ w kierunku wektora $\vec{u}=(-1,1,-1)$;

(b) punktu $P=(2,1,-2)$ na płaszczyznę $\pi\colon x+2y-z-2=0$ w kierunku wektora $\vec{u}=(1,2,3)$;

(c) prostej $l\colon x=-2y=3z$ na płaszczyznę $\pi\colon x+y+z-5=0$ w kierunku wektora $\vec{u}=(1,-1,1)$.

94. Określić czy punkt $Q=(2,-1,1)$ i początek układu współrzędnych leżą po tej samej stronie płaszczyzny

(a) $5x-3y+z-18=0$; **(b)** $2x+7y+3z+1=0$; **(c)** $x+5y+12z-1=0$.

95. Wyznaczyć punkt Q symetryczny do punktu $P=(2,-1,3)$ względem prostej

$$l\colon \begin{cases} x-y-4z+12=0\\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}.$$

96. Wyznaczyć punkt Q symetryczny do punktu $P=(3,-4,-6)$ względem płaszczyzny przechodzącej przez punkty $M_1=(-6,1,-5)$, $M_2=(7,-2,-1)$, $M_3=(10,-7,1)$.

97. Prawda czy fałsz? Jeśli to prawda należy uzasadnić stwierdzenie, a jeśli fałsz - podać kontrprzykład.

(a) Dla $\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{R}^3$ zachodzi $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$.

(b) Dla wszystkich wektorów $\vec{u}$ i $\vec{v}$ z $\mathbb{R}^3$ zachodzi równość $\vec{u}\times(\vec{u}\times\vec{v})=\vec{0}$.

(c) Jeśli wektory $\vec{a},\vec{b},\vec{c}\in\mathbb{R}^3$ spełniają warunek $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=0$ to $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$.

(d) Każde dwie proste w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ albo się przecinają, albo są równoległe.

(e) W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ istnieje dokładnie jedna prosta, która jest prostopadła do prostych $x=y=\dfrac{z}{2}$ i $x=y=-z$.

(f) W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ dwie płaszczyzny prostopadłe do trzeciej płaszczyzny są równoległe.

(g) W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ równanie $y=x$ przedstawia prostą przechodzącą przez punkt $(1,1,0)$.

Opracowanie: Karina Olszak