

WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 20

228. Znaleźć i narysować dziedziny funkcji:

a) $h(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$; b) $f(x, y, z) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2 + z^2)} - 1$.

229. Zbadać istnienie następujących granic:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x+y}$; b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x^3 + y^3 + 1} - 1}$; c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (4,-3)} \frac{xy + 12}{x^2 + y^2 - 25}$;
 d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\sin x^2 y}{x^2}$; e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \cos \frac{1}{xy}$;

230. Pokazać, że dla funkcji f określonej na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ wzorem $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$ mamy:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right] = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right]$;
 b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ nie istnieje.

231. Niech $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, 0 < y < x^2\}$. Określmy funkcję $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ następująco

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } (x, y) \notin A, \\ 1 & \text{jeśli } (x, y) \in A. \end{cases}$$

- a) Pokazać, że dla każdego ciągu (x_n) zbieżnego do zera oraz dowolnego $a \in \mathbb{R}$ mamy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, ax_n) = 0$;
 b) Sprawdzić, czy istnieje $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$;
 c) Sprawdzić, czy istnieją $f_x(0, 0)$ i $f_y(0, 0)$.

232. Zbadać istnienie i ciągłość pochodnych cząstkowych I rzędu dla funkcji

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{jeśli } y \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli } y = 0. \end{cases}$$

233. Sprawdzić, czy $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ dla $f(x, y) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{y}{x} - y^2 \sin \frac{x}{y} & \text{jeśli } xy \neq 0, \\ 0 & \text{jeśli } xy = 0. \end{cases}$

234. Niech $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{jeśli } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{jeśli } x = y = 0. \end{cases}$ Wiemy, że f jest nieciągła w punkcie $(0, 0)$.

- a) Pokazać, że f jest funkcją ciągłą po każdej ze zmiennych x i y , gdy druga zmienna jest ustalona.
 b) Czy dla f istnieje $f_{xy}(0, 0)$?

235. Niech f będzie funkcją dwóch zmiennych ciągłą po x przy każdym ustalonym y i mającą ograniczoną pochodną $f_y(x, y)$ po zmiennej y . Pokazać, że f jest funkcją ciągłą dwóch zmiennych.

236. Niech $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją różniczkowalną w (x_0, y_0) i niech

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - a - b(x - x_0) - c(y - y_0)}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Pokazać, że $a = f(x_0, y_0)$, $b = f_x(x_0, y_0)$ i $c = f_y(x_0, y_0)$.

237. Zbadać ciągłość i różniczkowalność funkcji $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ w punkcie $(0, 0)$.

238. Pokazać, że funkcja $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{jeśli } x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & \text{jeśli } x = y = 0 \end{cases}$ jest różniczkowalna w punkcie $(0, 0)$, a jej pochodne cząstkowe $f_x(x, y)$ i $f_y(x, y)$ są nieciągłe w $(0, 0)$.