WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 21

239. Określmy $f : \mathbb{R}^n \to R$ wzorem $f(P) = |P|^2$. Obliczyć $\dfrac{\partial f(P)}{\partial U}$ jeśli $U = \left(\frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

240. Niech U będzie dowolnym wersorem w $\mathbb{R}^2$ i niech

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy \sin x}{x^2+y^2} & \text{jeśli} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{jeśli} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Obliczyć $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial U}$.

241. Pokazać, że dla każdego wersora U funkcja

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^6+2y^2} & \text{jeśli} \quad (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{jeśli} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

ma pochodną kierunkową $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial U}$, ale f nie jest ciągła w $(0,0)$.

242. Niech $f : \mathbb{R}^n \to R$ będzie funkcją różniczkowalną w P_0 i niech $U = (u_1, \ldots, u_n)$ będzie wersorem w $\mathbb{R}^n$. Pokazać, że

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial U} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0) u_i$$

Podać wersor U, dla którego $\dfrac{\partial f(P_0)}{\partial U}$ osiąga maksymalną wartość.

243. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma na pewnym otoczeniu punktu (x_0, y_0) ograniczone pochodne cząstkowe f_x i f_y. Pokazać, że f jest ciągła w (x_0, y_0).

244. Niech $h(U) = f(G(U))$. Wyznaczyć $d_{U_0}h$ na dwa sposoby (podobnie jak na wykładzie) dla

$$U_0 = (u_0, v_0, w_0) = (1,1,1), \qquad f(x,y,z) = e^{-(x+y+z)}, \qquad \begin{aligned} g_1(u,v,w) &= \ln u - \ln v + \ln w, \\ g_2(u,v,w) &= -2\ln u - 3\ln w, \\ g_3(u,v,w) &= \ln u + \ln v + 2\ln w. \end{aligned}$$

245. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ będą funkcjami różniczkowalnymi. Zdefiniujmy funkcje $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ następująco

$$h(u,v) = f(g(u,v), -g(u,v)).$$

Pokazać, że wtedy $dh = (f_x - f_y)dg$.

246. Niech $h(r, \varphi, \psi) = f(x,y,z)$, gdzie $x = r\cos\varphi \sin\psi$, $y = r \sin\varphi \sin\psi$ i $z = r\cos\psi$. Wyznaczyć h_r, h_φ, h_ψ w zależności od f_x, f_y i f_z. Następnie wyznaczyć h_{rr} i $h_{r\varphi}$ w zależności od pochodnych cząstkowych funkcji f.

247. Niech f i g będą różniczkowalne i niech $u(x,y) = f(x-cy) + g(x+cy)$. Pokazać, że $u_{yy} = c^2 u_{xx}$.

248. Mówimy, że $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest funkcją jednorodną stopnia r, jeśli dla dowolnego $t > 0$ i każdego P zachodzi $f(tP) = t^r f(P)$. Pokazać, że jeśli f jest funkcją różniczkowalną i jednorodną stopnia r, to

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_{x_i}(P) = r f(P).$$

Załóżmy dalej, że f jest klasy C^2. Pokazać, że

$$\sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j f_{x_i x_j}(P) = r(r-1) f(P).$$