WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 22

249. Niech funkcja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ma ciągłe pochodne cząstkowe rzędu 2. Określmy funkcję $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem $h(r, \varphi) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. Pokazać, że

$$f_{xx} + f_{yy} = h_{rr} + \frac{1}{r}h_r + \frac{1}{r^2}h_{\varphi\varphi}.$$

250. Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie funkcją mającą ciągłe pochodne cząstkowe rzędu k. Pokazać, że jeśli

$$\left|\frac{\partial^k f(P_1)}{\partial x_{i_k}\partial_{i_{k-1}}\cdots\partial x_{i_1}} - \frac{\partial^k f(P_0)}{\partial x_{i_k}\partial_{i_{k-1}}\cdots\partial x_{i_1}}\right| < \varepsilon$$

to

$$\left|\left(d^{(k)}_{P_1} f\right)(P - P_0) - \left(d^{(k)}_{P_0} f\right)(P - P_0)\right| < \varepsilon\, n^k |P - P_0|^k.$$

251. Prostą przechodzącą przez punkt (x_0, y_0, z_0) i prostopadłą do płaszczyzny stycznej do powierzchni $z = f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0, z_0), gdzie $z_0 = f(x_0, y_0)$, nazywamy *prostą normalną do powierzchni* $z = f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0, z_0).
Wyznaczyć równania płaszczyzny stycznej i prostej normalnej w punkcie (x_0, y_0, z_0), gdzie $z_0 = f(x_0, y_0)$, do powierzchni:

a) $z = x^3 + y^3 - 6xy$,

b) $z = \ln xy$, $(x_0 y_0 > 0)$.

252. Wyznaczyć $T_3(P)$ dla:

a) $f(x, y) = e^x \cos y$, $P_0 = (0, 0)$,

b) $f(x, y, z) = (x^2 + 2xy + y^2)e^z$, $P_0 = (1, 2, 0)$.

253. Dla $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ niech $f(P) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right)$, gdzie $a_1, a_2, \ldots a_n$ są stałymi. Dla funkcji f napisać wzór Taylora z resztą $k + 1$ w otoczeniu punktu $P_0 = (0, 0, \ldots, 0)$.

254. Niech $f(x, y) = (x^2+y^2)e^{x^2+y^2}$. Korzystając ze wzoru Maclaurina dla odpowiednio dobranej funkcji jednej zmiennej obliczyć $\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(0, 0)$ i $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2}(0, 0)$.

255. Zbadać, czy funkcja f ma ekstremum lokalne w punkcie P_0:

a) $f(x, y) = 2(x-[x]) - 3|y - 2|$, $P_0 = (-1, 2)$,

b) $f(x, y) = 2([x]-x) - 3|y - 2|$, $P_0 = (-1, 2)$.

256. Zbadać, czy funkcja $f(x, y) = xe^{y+x\sin y}$ ma ekstrema.

257. Wyznaczyć wszystkie ekstrema lokalne funkcji:

a) $f(x, y) = xy(1 - x - y)$,

b) $f(x, y) = xy\ln(x^2 + y^2)$,

c) $f(x, y, z) = \frac{x}{y + z} + \frac{y}{x + z} + \frac{z}{x + y}$, gdzie $x, y, z > 0$.

258. Podać przykład funkcji ciągłej dwóch zmiennych, która ma (dokładnie) dwa maksima lokalne właściwe, ale nie ma żadnego minimum lokalnego. Czy istnieje taka funkcja ciągła jednej zmiennej?

259. Znaleźć największą wartość iloczynu czterech dodatnich liczb, których suma wynosi 4.