

WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 23

260. Wyznaczyć F' , J_F oraz odwzorowanie afiniczne G dla którego $\lim_{P \rightarrow P_0} \frac{F(P) - G(P)}{|P - P_0|} = 0$, jeśli

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 + y + 2z \\ \cos(x + y + z) \\ e^{xyz} \end{bmatrix}, \quad P_0 = (1, -1, 0).$$

Przypomnienie: Odwzorowanie $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ postaci $T(P) = U_0 + A(P - P_0)$, gdzie U_0 jest stałym wektorem w \mathbb{R}^m , A jest stałą macierzą wymiaru $m \times n$, a P_0 jest stałym wektorem w \mathbb{R}^n nazywamy przekształceniem afinicznym.

261. Wyznaczyć F' oraz J_F :

$$a) \quad F(r, \varphi) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{bmatrix}, \quad b) \quad F(r, \varphi, h) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ h \end{bmatrix}, \quad c) \quad F(r, \varphi, \psi) = \begin{bmatrix} r \cos \varphi \sin \psi \\ r \sin \varphi \sin \psi \\ r \cos \psi \end{bmatrix}.$$

262. Niech $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym i odwracalnym na zbiorze zwartym S . Pokazać, że F^{-1} jest ciągłe.

263. Niech odwzorowanie $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ będzie określone wzorem

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} e^x \cos y \\ e^x \sin y \end{bmatrix}.$$

- a) Pokazać, że F jest lokalnie odwracalnym odwzorowaniem na \mathbb{R}^2 .
- b) Niech $D_F = S_\varphi = \{(x, y) : \varphi \leq y < \varphi + 2\pi\}$. Wyznaczyć O_F .
- c) Na O_F wyznaczyć funkcję F^{-1} .

264. Niech $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ i $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ będą odwzorowaniami mającymi ciągłe pochodne cząstkowe. Zdefiniujmy $H = F \circ G$. Pokazać, że

$$\frac{\partial(h_1, h_2, \dots, h_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} = \frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(g_1, g_2, \dots, g_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}.$$

265. Niech $H(U) = (F \circ G)(U)$. Wyznaczyć $H'(U_0)$, jeśli

$$F(x, y, z) = \begin{bmatrix} x^2 + y^2 \\ z \\ x^2 + y^2 \end{bmatrix}, \quad G(u, v, w) = \begin{bmatrix} w \cos u \sin v \\ w \sin u \sin v \\ w \cos v \end{bmatrix}, \quad U_0 = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, 2\right).$$

266. Odwzorowanie

$$F(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}$$

nazywamy analitycznym na zbiorze S , jeśli na S ma ciągłe pochodne cząstkowe oraz

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x.$$

Udowodnić, że jeśli $J_F \neq 0$ na S , a F jest tam odwracalne i analityczne, to F^{-1} jest analityczne na $F(S)$.

267. Odwzorowanie $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ma ciągłe pochodne cząstkowe. Załóżmy, że $J_F \neq 0$ i $F^{-1} = G$. Pokazać, że jeśli $U = F(P)$ i $P = G(U)$, to

$$\frac{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(u_1, u_2, \dots, u_n)} = 1.$$