

WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 24

268. Znaleźć równanie stycznej w punkcie $(1, 1)$ do krzywej danej równaniem uwikłanym

$$ye^x - xe^y + y - x^2 = 0.$$

269. W pobliżu punktu $(1, 1)$ narysować fragment krzywej $yx^3 + xy^3 = 2$.

270. Niech $u = u(x, y)$ będzie określona na pewnym otoczeniu punktu $(1, 1)$ przez warunki

$$x^2yu + 2xy^2u^3 - 3x^3y^3u^5 = 0 \quad \text{i} \quad u(1, 1) = 1.$$

Wyznaczyć równania płaszczyzny stycznej i prostej normalnej w punkcie $(1, 1, 1)$ do powierzchni $u = u(x, y)$.

271. Niech $u = u(x, y, z)$ będzie określona na pewnym otoczeniu punktu $(1, 1, 1)$ przez warunki

$$x^2y^5z^2u^5 + 2xy^2u^3 - 3x^3z^2u = 0 \quad \text{i} \quad u(1, 1, 1) = 1.$$

Wyznaczyć $u_x(1, 1, 1)$, $u_y(1, 1, 1)$ i $u_z(1, 1, 1)$.

272. Załóżmy, że odwzorowanie $F = (f, g, h)$ ma ciągłe pochodne cząstkowe na pewnym otoczeniu punktu $P_0 = (x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$. Niech $F(P_0) = 0$ i niech w punkcie P_0

$$\frac{\partial(f, g, h)}{\partial(y, z, u)} \neq 0.$$

Czy warunki

$$F(x, y, z, u, v) = 0, \quad y(x_0, v_0) = y_0, \quad z(x_0, v_0) = z_0, \quad u(x_0, v_0) = u_0$$

wyznaczają y , z i u jako funkcje zmiennych x i v , mające ciągłe pochodne cząstkowe na pewnym otoczeniu punktu (x_0, v_0) ? Jeśli tak, to wyznacz pochodne cząstkowe pierwszego rzędu tych funkcji jako stosunki odpowiednich jacobianów.

273. Uzasadnić, że gradient funkcji różniczkowalnej jest prostopadły do poziomicy tej funkcji.

274. Uzasadnić, że układ

$$\begin{cases} e^x \cos y + e^z \cos u + e^v \cos w + x = 3 \\ e^x \sin y + e^z \sin u + e^v \cos w = 1 \\ e^x \operatorname{tg} y + e^z \operatorname{tg} u + e^v \operatorname{tg} w + z = 0 \end{cases}$$

określa wokół punktu $(0, 0, 0)$ funkcje u , v i w zmiennych x , y i z . Wyznaczyć $u_x(0, 0, 0)$, $v_x(0, 0, 0)$ i $w_x(0, 0, 0)$.

275. Wyznaczyć ekstrema funkcji uwikłanej $y = f(x)$ określonej równaniem:

$$\text{a) } x^2 + y^2 = x^4 + y^4 \quad \text{b) } (x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2).$$

276. Znaleźć ekstrema warunkowe funkcji f przy zadanym warunku

$$\text{a) } f(x, y) = x + y \text{ przy warunku } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2};$$

$$\text{b) } f(x, y) = -\frac{x^2}{4} + 3xy + y^2 \text{ przy warunku } x^2 + y^2 = 13.$$

277. Niech $n \geq 1$, $x \geq 0$ i $y \geq 0$. Udowodnić znaną nam nierówność $\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^n$ tym razem wyznaczając minimum warunkowe funkcji $f(x, y) = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$ przy ograniczeniu $x + y = \gamma$.

278. Pokazać, że jeśli $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$, oraz $\sum_{i=1}^n x_i = n\alpha$, dla pewnej dodatniej liczby α , to

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \leq \binom{n}{2} \alpha^2.$$