WPPT, Analiza Matematyczna - Lista 26

289. Niech $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$. Obliczyć całki

a) $\displaystyle\int_R (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\, dX$, b) $\displaystyle\int_R (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)\, dX$ c) $\displaystyle\int_R (x_1 \cdot x_2 \cdot \cdots \cdot x_n)\, dX$.

290. Korzystając z twierdzenia Fubiniego pokazać, że jeśli pochodne mieszane $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ i $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ są ciągłe na zbiorze otwartym w $\mathbb{R}^2$, to są na tym zbiorze równe.

291. Niech f będzie funkcją ciągłą. Zamienić kolejność całkowania w całkach iterowanych

a) $\displaystyle\int_1^e dy \int_{\ln \frac{1}{y}}^{\ln y} f(x, y)\, dx$, b) $\displaystyle\int_{-1}^1 dy \int_{-1}^{y^3} f(x, y)\, dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{2-y^2} f(x, y)\, dx$.

292. Niech f będzie funkcją ciągłą na zbiorze $S \subset \mathbb{R}^3$, ograniczonym powierzchniami $x^2 + y^2 = -2y$, $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ i $z = x^2 + y^2 - 9$.
Uzupełnić zapisy

a) $\displaystyle\int_S f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \int dx \int dy \int f(x, y, z)\, dz$,

b) $\displaystyle\int_S f(x, y, z)\, d(x, y, z) = \sum \int dz \int dy \int f(x, y, z)\, dx$.

293. Obliczyć całkę

$$\int_S \frac{1}{(1 + x + y + z)^3}\, d(x, y, z),$$

jeśli S ograniczony jest płaszczyznami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ i $x + y + z = 1$.

294. Obliczyć objętość n-wymiarowej piramidy $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant 1$, $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots, x_n \geqslant 0$.

295. Krzywa $x = \sqrt{3}|y|$ rozcina koło $(x - 1)^2 + y^2 \leqslant 1$ na trzy części. Korzystając z całek podwójnych, obliczyć pole każdej z nich.

296. Stosując odpowiednią zamianę zmiennych w całce, obliczyć pole obszaru

a) $S_1 = \{(x, y) : (x^2 + y^2)^2 \leqslant 2(x^2 - y^2)\}$,

b) $S_2 = \{(x, y) : ax \leqslant y^2 \leqslant bx,\ \alpha y \leqslant x^2 \leqslant \beta y\}$, gdzie $0 < a < b$ oraz $0 < \alpha < \beta$.

297. Niech $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą. Dla $t \geqslant 0$ określmy funkcję $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ wzorem

$$F(t) = \int_{S(t)} f(x^2 + y^2 + z^2)\, d(x, y, z),$$

gdzie $S(t) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant t^2, x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0\}$. Wykazać, że $F'(t) = \pi t^2 f(t^2)/2$.

298. Obiczyć objętość bryły, którą z kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$, $R > 0$, wycina

a) walec $x^2 + y^2 = a^2$, $0 < a < R$, b) walec $x^2 + y^2 = Rx$, c) stożek $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

299. Wyznaczyć współrzędne środka ciężkości bryły jednorodnej ograniczonej powierzchniami $(x/a)^2 + (y/b)^2 + (z/c)^2 = 1$ i $z = 0$.

300. Znaleźć zależność między całkami $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)}\, d(x, y, z)$ i $\displaystyle\int_0^\infty x^2 e^{-x^2}\, dx$ i wyznaczyć ich wartości.