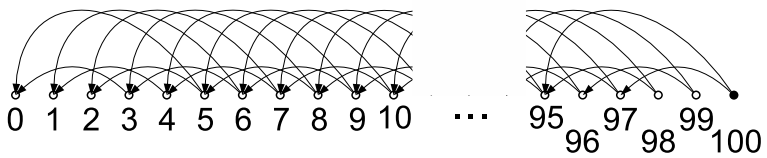



Rysunek 1: Graf gry polegającej na zabieraniu 3 bądź 5 kamieni ze stosu liczącego początkowo 100 kamieni

# 1 Gry, grafy i numerologia

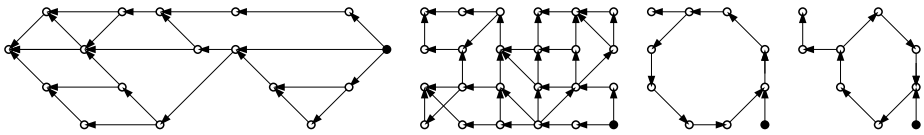
Ania i Bartek grają w następującą grę. Na stole leży 100 kamieni, oboje na przemian zabierają 3 lub 5 z nich. Zaczyna Ania, a ten, kto nie może wykonać ruchu, przegrywa. Kto ma strategię wygrywającą?

Z pozoru to pytanie wydaje się trudne: wykonanych będzie co najmniej 20 ruchów, a przy każdym z nich do wyboru są dwie możliwości. Ale wcale nie trzeba sprawdzać ponad miliona możliwości. Wystarczy bowiem zastąpić liczbę 100 przez 0, 1, 2, 3, itd., i kolejno badać, kto ma strategię wygrywającą dla tak zmienionej gry. A to jest łatwe: jeśli w 18. kroku chcemy sprawdzić, czy Ania może wygrać, gdy zaczyna od 17 kamieni, wystarczy wiedzieć, czy rozpoczynający grę może wygrać, gdy na stole jest 12 bądź 14 kamieni — a to sprawdziliśmy już wcześniej (w kroku 13. i 15.). Tylko jeśli w obu przypadkach odpowiedź jest twierdząca, to Ania nie wygra — niezależnie od jej ruchu Bartek będzie miał możliwość zwycięstwa.

Oznacza to, że aby odpowiedzieć na początkowe pytanie, wystarczy przeprowadzić około 100 rachunków. Sprawa się jeszcze bardziej upraszcza, jeśli zacznie się przeprowadzać te rachunki: nietrudno zaobserwować, że Ania ma strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy początkowa liczba kamieni $n$ dzieli się przez 8 z resztą większą od 2, a więc także dla $n = 100$.

**Ćwiczenie:** Udowodnić (indukcyjnie) powyższe twierdzenie.

Wygodnie jest myśleć o takiej grze jak o wędrówce po odpowiednim grafie. Każdy możliwy *stan* gry reprezentowany jest przez wierzchołek, a możliwe *ruchy* — przez (skierowane) krawędzie. Jeśli z danego stanu nie można wykonać ruchu, to taki stan nazywamy końcowym — z odpowiadającego mu wierzchołka nie wychodzi żadna krawędź. W naszym przypadku stan gry to po prostu liczba kamieni na stole, więc rozważany graf będzie stosunkowo prosty — jego kawałek przedstawiony jest na rysunku 1. Umówmy się, że



Rysunek 2: Czy Ania może wygrać te gry?

wierzchołek początkowy zaznaczamy na czarno.

Zazwyczaj narysowanie grafu gry jest technicznie niewykonalne. Liczba stanów nawet tak prostej gry jak kółko i krzyżyk wynosi ponad 1000; o szachach czy go lepiej nawet nie wspominać[1]. Mimo to bardzo wygodnie jest myśleć w kategoriach grafów — pozwala to spojrzeć w podobny sposób na całkiem różne gry. Dlatego odtąd będziemy uznawali, że nasza gra polega właśnie na wędrówce po grafie.

Podstawową własnością, którą będziemy zakładać, jest skończoność gry. Oznacza to skończoną liczbę wierzchołków i brak cykli w grafie. Przyjmujemy też, że gracz, który nie może wykonać ruchu, przegrywa. Jeśli akurat interesuje nas gra, w której obowiązuje przeciwna zasada, to możemy sztucznie dodać do grafu jeden wierzchołek i narysować do niego krawędzie z wszystkich możliwych stanów końcowych. Swoją drogą, opisana właśnie operacja odwrócenia celu gry bardzo często daje niezwykle ciekawy rezultat.

Jak zatem sprawdzić, czy rozpoczynająca grę Ania ma strategię wygrywającą? Wpierw przy wszystkich wierzchołkach końcowych wpisujemy „fałsz" (bowiem jeśli gra zaczynałaby się od nich, Ania takiej strategii by nie posiadała). Następnie rozważamy wierzchołki, z których krawędzie prowadzą wyłącznie do już opisanych wierzchołków. Aby istniała strategia wygrywająca dla gry rozpoczynającej się od wybranego wierzchołka, choć jedna krawędź zeń wychodząca musi prowadzić do wierzchołka opatrzonego słowem „fałsz". Rozważany wierzchołek opisujemy zatem alternatywą zaprzeczeń etykiet wierzchołków, do których można z niego bezpośrednio dojść. Łatwo sprawdzić, że kontynuując ten proces, opiszemy wszystkie wierzchołki grafu w prawidłowy sposób.

**Ćwiczenie:** Stwierdzić, czy w Ania ma strategią wygrywającą w grach o

[1] Gwoli ścisłości, w przypadku szachów i go trzeba bardzo ostrożnie określać stan gry, tak aby uwzględnić np. regułę remisu po trzykrotnym powtórzeniu pozycji (w szachach). Na dodatek nie mówiliśmy tu nic o grach z remisami — choć to akurat nie stwarza większych trudności

grafach przedstawionych na rys. 2.

**Rozwiązanie:** Nie, tak, tak (gra się zakończy!), nie (gra się nie zakończy).

A co się stanie, jeśli na początku będą dwa stosy kamieni i za każdym razem będziemy musieli decydować, z którego stosu kamienie chcemy zabrać? Przegrywa znów osoba, która nie może wykonać ruchu. Jeśli oba stosy mają po 100 kamieni, to odpowiedź jest łatwa (dlaczego?); ale co jeśli na jednym stosie będzie 100, a na drugim 110 kamieni? W języku grafów pytanie jest następujące. Mamy dane dwa grafy i za każdym razem musimy wybrać, na którym z nich się przesuwamy. Jak w takiej złożonej grze łatwo stwierdzić, czy mamy strategię wygrywającą? Oczywiście możemy narysować graf nowej gry i wszystko przeliczyć od nowa — ale szukamy *łatwego* rozwiązania. Liczba stanów nowej gry jest przecież równa *iloczynowi* liczb wierzchołków w obu grafach, a chcielibyśmy móc rozwiązać problem, wykonując mniej więcej tyle obliczeń, ile jest *w sumie* wierzchołków.

**Ćwiczenie:** Jeśli na obu grafach (rozpatrywanych osobno) Ania znajduje się w pozycji przegrywającej, to w nowej grze też nie ma strategii wygrywającej. Jeśli tylko w jednym z grafów Ania znajduje się w pozycji wygrywającej, to może wygrać złożoną grę.

**Rozwiązanie:** 1. Po każdym naszym ruchu na pierwszym grafie, przeciwnik wykonuje ruch również na pierwszym grafie, ustawiając nas ponownie w pozycji przegrywającej. Analogicznie w przypadku ruchu na drugim grafie. W ten sposób po pewnej liczbie kroków znajdziemy się w wierzchołku końcowym na obu grafach. 2. Wystarczy, że Ania jednym ruchem sprowadzi Bartka do sytuacji z punktu 1.

Niestety powyższy wynik nie udziela odpowiedzi na nasze pytanie, bowiem w rozważanym przyadku obie pozycje (100 i 110 kamieni) są wygrywające. Okazuje się, że w tej sytuacji nic nie można stwierdzić. Świadczą o tym następujące przykłady.

Niech graf $A$ składa się z dwóch wierzchołków $a_1$ i $a_2$ oraz jednej krawędzi $(a_1, a_2)$ (wychodzącej z $a_1$, wpadającej do $a_2$); wierzchołkiem początkowym jest $a_1$. Graf $B$ niech składa się z trzech wierzchołków $b_1$, $b_2$ i $b_3$ oraz trzech krawędzi: $(b_1, b_2)$, $(b_1, b_3)$ oraz $(b_2, b_3)$; początkowym wierzchołkiem jest $b_1$. W obu grafach Ania ma oczywistą strategię wygrywającą. Wędrówka po dwóch grafach $A$ kończy sią porażką Anii, podobnie wędrówka po dwóch grafach $B$. Mimo to w wędrówce po dwóch grafach — jednym $A$ i jednym $B$ — Ania może zwyciężyć. Do rozwiązania naszego problemu potrzebny jest zatem nowy pomysł. W tym celu wprowadzimy pojęcie *sumy dwójkowej*.

Wiadomo, że każdą liczbę naturalną (tzn. całkowitą dodatnią) można zapisać jednoznaczne w systemie dwójkowym, a więc w postaci $k = k_0 + 2k_1 +$

$4k_2 + 8k_3 + ... + 2^n k_n$, gdzie $n \geq 0$, $k_j \in \{0, 1\}$ oraz $k_n = 1$. Przyjmijmy dla wygody, że $k_j = 0$ dla $j > n$; możemy więc napisać $k = k_0 + 2k_1 + 4k_2 + 8k_3 + ....$ Jeśli $k = 0$, to przyjmujemy $k_j = 0$ dla wszystkich $j$.

Jeśli zapiszemy $a$ i $b$ w powyższy sposób, to możemy określić ich sumę dwójkową[2] $c = a \oplus b$ poprzez zdefiniowanie reprezentacji dwójkowej liczby $c$. Określamy mianowicie $c_j = |a_j - b_j|$. Jeśli 0 interpretować jako „fałsz", a 1 jako „prawdę", to $c_j$ jest alternatywą wykluczającą $a_j$ i $b_j$. Z tego powodu w informatyce operacja „$\oplus$" nazywana jest często bitową alternatywą wykluczającą bądź krócej bitowym XOR (od ang. *eXclusive OR*). Nazwa „suma dwójkowa" bierze się stąd, że $c_j$ jest określone jako suma $a_j$ i $b_j$ modulo 2.

**Ćwiczenie:** Policzyć $7 \oplus 4$, $3 \oplus 6$, $16 \oplus 5$, $13 \oplus 22$.

**Rozwiązanie:** 3, 5, 21, 27.

Łatwo sprawdzić, że $a \oplus b = b \oplus a$ oraz $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$. Ponadto zachodzi $a \oplus a = 0$, $a \oplus 0 = a$, $|b - a| \leq a \oplus b$. Potrzebna nam będzie jeszcze jedna własność.

**Ćwiczenie:** Niech $0 \leq c < a \oplus b$. Wówczas $a \oplus c < b$ lub $b \oplus c < a$.

**Rozwiązanie:** Porównajmy zapis binarny liczb $c$ i $d = a \oplus b$. Niech $n$ będzie numerem pierwszej różniącej je pozycji, tzn. niech $c_n \neq d_n$, lecz $c_j = d_j$ dla $j > n$. Ponieważ $c < d$, otrzymujemy $c_n = 0$, $d_n = 1$. Oznaczmy $a' = b \oplus c$, $b' = a \oplus c$. Dla $j > n$ zachodzi $a'_j = b_j \oplus c_j = b_j \oplus d_j = b_j \oplus a_j \oplus b_j = a_j$. Podobnie $b'_j = b_j$. Z drugiej strony $a'_n = b_n \oplus c_n = b_n$ i analogicznie $b'_n = a_n$. Ponieważ $a_n \neq b_n$ (bowiem $a_n \oplus b_n = d_n = 1$), więc $a_n = 1$ lub $b_n = 1$. Jeśli $a_n = 1$, to $a' < a$; w przeciwnym wypadku $b' < b$.

Powtórzmy raz jeszcze procedurę etykietowania wierzchołków jednego grafu, lecz zamiast wartości logicznych, opisujmy wierzchołki liczbami naturalnymi w następujący sposób. Wierzchołki końcowe mają przypisane 0, a w każdym rozpatrywanym wierzchołku $v$ wpisujemy najmniejszą liczbę naturalną, która nie występuje jako etykieta wierzchołka, do którego prowadzi krawędź z $v$.

**Ćwiczenie:** Udowodnić, że strategia wygrywająca dla gracza rozpoczynającego wędrówkę po grafie istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy początkowy wierzchołek ma niezerową etykietę.

**Ćwiczenie:** Wyznaczyć nowe etykiety wierzchołków początkowych grafu z rysunku 1 oraz pierwszych dwóch grafów z rysunku 2.

**Rozwiązanie:** Rysunek 1: 1 (powtarza się okresowo $0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2$). Rysunek 2: 0 i 1.

[2] Uwaga! Nie ma ustalonego oznaczenia na sumę dwójkową; niektórzy używają „$+_2$", a w wielu językach programowania używa się znaku „^"

Teraz jesteśmy gotowi stawić czoło problemowi wędrówki po dwóch grafach.

**Twierdzenie 1:** Strategia wygrywająca dla gracza rozpoczynającego wędrówkę po dwóch grafach istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy etykiety przy obu początkowych wierzchołkach są takie same.

Powyższe twierdzenie jest bezpośrednim wnioskiem z następującego, dużo ogólniejszego wyniku. Rozważamy wędrówkę po dwóch grafach; stanem w takiej złożonej grze jest para wierzchołków, ruchem jest przejście po krawędzi w wybranym grafie.

**Twierdzenie 2:** Etykieta pary wierzchołków w złożonej grze jest sumą dwójkową etykiet tych wierzchołków w grach pojedynczych.

**Dowód:** Zastosujemy swego rodzaju zasadę indukcji matematycznej. Etykieta pary złożonej z wierzchołków końcowych jest oczywiście równa $0 = 0 \oplus 0$, a więc twierdzenie 2 tu zachodzi. Rozważmy stan złożony z pary wierzchołków o etykietach $a$ i $b$ i załóżmy, że wszystkie możliwe ruchy prowadzą do stanów, w których teza twierdzenia zachodzi.

Niech $0 \leq c < a \oplus b$. Określmy $a' = c \oplus b$, $b' = c \oplus a$. Wówczas $a' \oplus b = c = a \oplus b'$. Na mocy ustalonej w ćwiczeniu własności „$\oplus$”, zachodzi $a' < a$ lub $b' < b$. Ze względu na symetrię możemy przyjąć, że $a' < a$. Oznacza to, że istnieje krawędź z pierwszego wierzchołka rozważanej pary do wierzchołka o etykiecie $a'$, czyli możliwy jest ruch do pary wierzchołków o etykietach $a'$ i $b$. Etykieta tej pary to (zgodnie z poczynionym przez nas założeniem) $a' \oplus b$, czyli $c$.

Udowodniliśmy więc, że dla każdego $c < a \oplus b$ możliwy jest ruch do pary wierzchołków o etykiecie $c$. Pozostaje uzasadnić, że nie można wykonać ruchu do stanu o etykiecie $a \oplus b$. W istocie, każdy ruch na pierwszym grafie prowadzi do wierzchołka o etykiecie różnej od $a$, zaś jeśli $x \oplus b = a \oplus b$, to $x = (x \oplus b) \oplus b = (a \oplus b) \oplus b = a$. Podobnie mają się sprawy z ruchem na drugim grafie. W ten sposób udowodniliśmy, że etykietą rozważanego stanu jest $a \oplus b$ i zakończyliśmy dowód twierdzenia 2.

Z pomocą tego twierdzenia bez trudu możemy stwierdzić, że jeśli mamy dwa stosy — w jednym 100 kamieni, a w drugim 110, to Ania może wygrać. W istocie, etykieta wierzchołka początkowego odpowiadającego 100 kamieniom to 1, a etykieta 110 kamieni to 2.

**Ćwiczenie:** W grze *Nim* zaczynamy od pewnej liczby (np. trzech) stosów kamieni. Gracze na przemian usuwają dowolną liczbę kamieni z wybranego przez siebie stosu. Kto nie ma ruchu, przegrywa. Jak stwierdzić, czy Ania

(rozpoczynająca grę) ma strategię wygrywającą? Jak znaleźć wygrywający ruch?

**Rozwiązanie:** Łatwo sprawdzić, że etykieta pojedynczego stosu z $k$ kamieniami to $k$. Oznacza to, że Ania ma strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy suma dwójkowa liczb kamieni na poszczególnych stosach jest niezerowa. Wygrywa taki ruch, który zeruje tę sumę.

Powiedzmy, że są trzy stosy o liczności $a, b, c$. Znajdujemy $s = a \oplus b \oplus c$. Jeśli $s = 0$, to Ania przegra (chyba, że Bartek się pomyli). W przeciwnym wypadku zachodzi co najmniej jedna z nierówności: $a \oplus s < a$, $b \oplus s < b$ lub $c \oplus s < c$ (wynika to z twierdzenia 2, ale można też to udowodnić bezpośrednio). Jeśli np. $a \oplus s < a$, to Ania zdejmuje $a - (a \oplus s)$ kamieni z pierwszego stosu.

**Ćwiczenie:** Inny wariant gry Nim różni się od powyższego tylko tym, że gracz, który nie może wykonać ruchu, wygrywa. Jak zmieniają się odpowiedzi na postawione wyżej pytania?

**Rozwiązanie:** O dziwo zmienia się bardzo niewiele: etykieta stanu tej gry jest taka sama, jak w oryginalnej grze Nim, chyba że każdy stos liczy co najwyżej jeden kamień. Wtedy etykietą jest suma dwójkowa liczb kamieni (czyli zer i jedynek) i jeszcze dodatkowej jedynki. Strategia jest więc identyczna aż do momentu, gdy Ania zastanie tylko jeden stos z co najmniej dwoma kamieniami. Wówczas jeśli w pierwotnej wersji gry Nim Ania opróżniłaby stos, to w zmienionej zostawia jeden kamień, i na odwrót. Dalsze posunięcia są już wymuszone.

Niestety ten wynik nie jest już bezpośrednią konsekwencją twierdzenia 2.

Podamy jeszcze jedno ciekawe zastosowanie twierdzenia 2. Rozważmy następujące uogólnienie gry Nim: zaczynamy od pewnej liczby stosów kamieni. Ruch polega na ujęciu pewnej liczby kamieni z wybranego stosu, a następnie podzieleniu go na dwa stosy w dowolny sposób. Liczbę ujmowanych kamieni możemy ustalić (choćby tak, jak na początku: 3 lub 5 do wyboru) lub nie (jak w grze Nim). Znów gracz, który nie ma możliwości wykonania ruchu, przegrywa.

Inna wersja tej samej gry wygląda następująco: mamy taśmę papieru podzieloną na pewną liczbę kratek (czyli szachownicę o jednym wierszu). Pewne kratki mogą być zaczernione, reszta jest biała. Ruch polega na zaczernieniu pewnej liczby kolejnych białych kratek; znów liczba ta może być ustalona (np. 3 lub 5 do wyboru) lub nie (wariant Nim). Gracz bez ruchu przegrywa.

Jak sprawdzić, czy istnieje strategia wygrywająca? Na mocy twierdzenia 2. etykieta początkowego stanu jest sumą dwójkową etykiet odpowiadających pojedynczym stosom (myślmy o wersji ze stosami i kamieniami). Pozostaje znaleźć etykietę odpowiadającą pojedynczemu stosowi z $n$ kamieniami.

Dla $n = 0$ jest łatwo. Załóżmy więc, że znamy już etykiety pojedynczych stosów o dowolnej liczności mniejszej niż $n$, gdzie $n > 0$. Ponownie dzięki

| | 0 [0] | 1 [0] | 2 [1] | 3 [1] | 4 [2] | 5 [2] | 6 [3] | 7 [3] | 8 [4] | 9 [1] | 10 [1] | 11 [5] | 12 [6] | 13 [3] | 14 [3] | 15 [2] | 16 [2] | 17 [1] | 18 [1] | 19 [0] |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0[0] | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 1[0] | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 2[1] | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 3[1] | 1 | 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 4[2] | 2 | 2 | 3 | 3 | 0 | | | | | | | | | | | | | | | |
| 5[2] | 2 | 2 | 3 | 3 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | | | |
| 6[3] | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | | | | | | | | | | | | | |
| 7[3] | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | | | | | | | | | | | | |
| 8[4] | 4 | 4 | 5 | 5 | 6 | 6 | 7 | 7 | 0 | | | | | | | | | | | |
| 9[1] | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 3 | 2 | 2 | 5 | 0 | | | | | | | | | | |
| 10[1] | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 3 | 2 | 2 | 5 | 0 | 0 | | | | | | | | | |
| 11[5] | 5 | 5 | 4 | 4 | 7 | 7 | 6 | 6 | 1 | 4 | 4 | 0 | | | | | | | | |
| 12[6] | 6 | 6 | 7 | 7 | 4 | 4 | 5 | 5 | 2 | 7 | 7 | 3 | 0 | | | | | | | |
| 13[3] | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 7 | 2 | 2 | 6 | 5 | 0 | | | | | | |
| 14[3] | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 0 | 7 | 2 | 2 | 6 | 5 | 0 | 0 | | | | | |
| 15[2] | 2 | 2 | 3 | 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 6 | 3 | 3 | 7 | 4 | 1 | 1 | 0 | | | | |
| 16[2] | 2 | 2 | 3 | 3 | 0 | 0 | 1 | 1 | 6 | 3 | 3 | 7 | 4 | 1 | 1 | 0 | 0 | | | |
| 17[1] | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 3 | 2 | 2 | 5 | 0 | 0 | 4 | 7 | 2 | 2 | 3 | 3 | 0 | | |
| 18[1] | 1 | 1 | 0 | 0 | 3 | 3 | 2 | 2 | 5 | 0 | 0 | 4 | 7 | 2 | 2 | 3 | 3 | 0 | 0 | |
| 19[0] | 0 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 1 | 1 | 5 | 6 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 |

Tablica 1: Tabela stanów w grze „paski”

twierdzeniu 2. znamy etykiety wszystkich stanów, do których możemy przejść bezpośrednio z pojedynczego stosu zawierającego $n$ kamieni. W istocie, jeśli możemy wykonać ruch, który doprowadzi nas do dwóch stosów o liczności $a$ i $b$, to z pewnością $a < n$ i $b < n$, a więc znamy etykietę otrzymanego stanu — jest to suma dwójkowa etykiet pojedynczych stosów zawierających odpowiednio $a$ i $b$ kamieni. Bez trudu znajdujemy więc szukaną etykietę stosu z $n$ kamieniami.

Zobaczmy, jak to działa na przykładzie. Zacznijmy od białego paska o długości 19. Powiedzmy, że możemy zaczerniać kolejne 2 lub 4 białe pola.

Etykiety pasków o długości 0 lub 1 to oczywiście 0. Pasek 2 możemy tylko w całości zaczernić, więc jego etykietą jest 1. Z paska 3 zostanie kawałek o długości 1, więc też ma etykietę 1. Z czwórki możemy zostawić 0, 2 lub $1+1$ (tzn. dwa paski o długości 1); te stany mają etykiety 0, 1 i 0, więc etykietą 4 jest 2. Z piątki może zostać 3[1] (w nawiasie kwadratowym zapisujemy etykietę), $2+1$[1] lub 1[0]. Etykietą 5 jest więc 2. Z sześciu kamieni możemy uzyskać 4[2], $3+1$[1], $2+2$[0], 2[1] i $1+1$[0], zatem 6 ma etykietę 3. I tak dalej.

Możemy dla wygody tworzyć tablicę taką jak tabela 1. Opisujemy $i$-ty wiersz oraz $i$-tą kolumnę liczbą $i$ oraz etykietą paska o długości $i$ (numerujemy od zera!). Na przecięciu $i$-tego wiersza i $j$-tej kolumny jest suma dwójkowa odpowiadających im etykiet. Aby uzyskać etykietę paska o długości $k$, patrzymy na przekątną łączącą komórki o współrzędnych $(0, k-4)$ i $(k-4, 0)$ oraz przekątną łączącą komórki $(0, k-2)$ i $(k-2, 0)$. Etykietą paska o długości $k$ jest najmniejsza liczba, której nie widzimy na tych przekątnych.

Dla oszczędności wypełniamy tylko połowę tabeli. Najwygodniej posłużyć się do tego celu komputerem.

Wynik jest nieco zaskakujący: Ania nie ma strategii wygrywającej i jest to najmniejsza długość paska (różna od 0 i 1) o tej własności. Następną jest 27, a potem jeszcze 85 i 285. Wszystkie inne — o ile w ogóle istnieją — są już większe od miliona.

Mając etykiety pojedynczych pasków, łatwo też wyłuskać strategię wygrywającą dla Anii bądź Bartka. Przyjmijmy, że Ania doprowadziła na przykład do stanu $5 + 12[4]$. Bartek wpierw szuka, jak można przejść ze stanu $5[2]$ do stanu o etykiecie $2 \oplus 4 = 6$. Ponieważ jest to niemożliwe, więc Bartek sprawdza drugi pasek: jak przejść ze stanu $12[6]$ do stanu o etykiecie $6 \oplus 4 = 2$. Patrząc na odpowiednie przekątne, Bartek ustali, że może zaczernić dwa pola i przejść do sytuacji $5 + 7 + 3[0]$ lub zaczernić cztery pola, by doprowadzić do stanu $5 + 6 + 2[0]$. Wszystko to byłoby bardzo trudne, gdybyśmy nie korzystali z twierdzenia 2.

A jaki ruch powinna wykonać Ania, gdy początkowo ma pasek o długości 20? Tutaj lepiej chwilkę pomyśleć, niż liczyć: powinna zaczernić środkowe dwa lub cztery pola, a następnie każdy ruch Bartka powielać odbity symetrycznie względem środka paska.

**Ćwiczenie:** Dla jakich $n$ Ania ma strategię wygrywającą w grze w zaczernianie paska $1 \times n$, jeśli wolno zaczerniać 2 lub 6 kolejnych białych pól?

**Rozwiązanie:** Wystarczy zaobserwować (a następnie udowodnić), że dla $n \geq 3$ etykietą paska $1 \times n$ jest odpowiednio 2, 0, 3, 1, jeśli $n$ daję resztę z dzielenia przez 4 równą 0, 1, 2, 3. Początkowe etykiety to 0, 0 i 1 (dla $n = 0, 1, 2$).

Na koniec powróćmy do gry Nim w następującej wersji. Ruch polega na zdjęciu z wybranego stosu dowolnej liczby kamieni i następnie podzieleniu go na dwa stosy w dowolny sposób.

**Ćwiczenie:** Jak wygląda strategia Anii w tej grze?

**Rozwiązanie:** Tak samo, jak w oryginalnej grze Nim!